

9. Identyfikacja modelu dynamicznego.

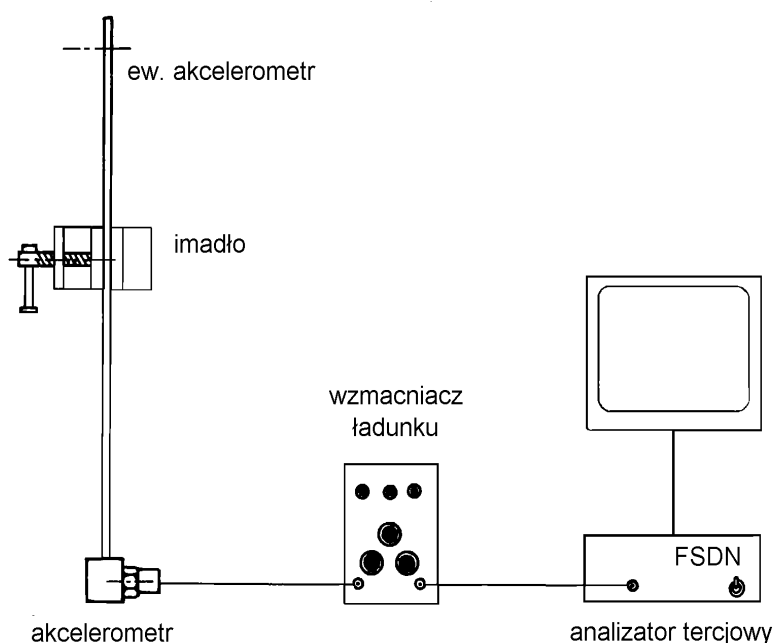
Ćwiczenie ilustruje możliwości wykorzystania zaawansowanych technik pomiarowych do rozwiązywania praktycznych zadań inżynierskich. Za przykład posłużył obiekt w postaci belki sprężystej pobudzanej impulsowo do drgań. Uzyskane w rezultacie modelowania rozwiązania równania ruchu różnią się nieco od rzeczywistości. Identyfikacja prowadzi do minimalizacji tych różnic na podstawie wyników pomiarów obiektu rzeczywistego. W efekcie zmodyfikowany opis modelowy staje się narzędziem umożliwiającym analizę własności wielu obiektów podobnych.

Obiektem badań jest belka stalowa o przekroju prostokątnym mocowana w imadle stołowym. Jeden koniec belki pozostaje swobodny, drugi zakończono stalowym prostopadłościanem o wymiarach 40x40x100 [mm]. Do jednego z końców belki mocowany jest akcelerometr piezoelektryczny o masie $1,1 \cdot 10^{-2}$ [kg].

Moduł Younga dla stali wynosi $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ [Pa], gęstość stali $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ [kg/m³]. Pozostałe wymiary obiektu należy zmierzyć.

Układ pomiarowy składa się z akcelerometru piezoelektrycznego (na przykład Brüel&Kjær'a typu 4384), wzmacniacza ładunku (na przykład Brüel&Kjær'a typu 2628, oraz analizatora tercjowego (na przykład FSDN).

Schemat stanowiska laboratoryjnego przedstawiono na rysunku II.9.1.



Rys. II.9.1 Schemat stanowiska laboratoryjnego

Widmo tercjowe uzyskane przez filtrację sygnału wizualizowane jest na ekranie monitora (poziom amplitud w skali decybelowej). Istnieje możliwość zapamiętania chwilowego widma i zatrzymania zmian obrazu na ekranie. W analizatorze FSDN do tego celu służy przełącznik "DISPLAY" na płycie czołowej: zatrzymanie obrazu następuje po przełączeniu go w położenie "HOLD". Powrót do położenia "RUN" powoduje ponowną ciągłą aktualizację wyników. Charakterystyki kolejnych filtrów analizatora FSDN przedstawiono na rysunku II.9.2.

Podczas wykonywania ćwiczenia należy kolejno:

- ➔ zanotować odległość od punktu mocowania belki w imadle do osi symetrii akcelerometru oraz wariant lokalizacji akcelerometru;
- ➔ pobudzić impulsowo drgania giętne, a po ustaniu przesterowań zatrzymać obraz na ekranie analizatora i zapisać częstotliwości środkowe oraz poziom amplitud kilku najwyższych prążków widmowych;

- ➔ określić (przez porównanie różnicy poziomów amplitud najwyższych prążków z charakterystyką właściwego filtra) częstotliwość drgań własnych badanego obiektu;
- ➔ obliczyć częstotliwość drgań własnych belki na podstawie rozwiązania równania ruchu dla modelu pomijającego i uwzględniającego masę belki;
- ➔ wybrać (i uzasadnić wybór) jeden z modeli do identyfikacji;
- ➔ wybrać (i uzasadnić wybór) parametr(y), które będą identyfikowane;
- ➔ zidentyfikować wybrany(e) parametr(y);
- ➔ obliczyć (na podstawie zależności uzyskanej w wyniku identyfikacji), częstotliwość drgań własnych belki podobnej, o długości zadanej przez prowadzącego ćwiczenie.

Warunkiem zaliczenia ćwiczenia jest poprawne jego wykonanie udokumentowane sprawozdaniem opracowanym w trakcie zajęć, oraz znajomość zagadnień dotyczących identyfikacji modeli dynamicznych. Sprawozdanie, opracowywane indywidualnie przez każdego studenta, powinno zawierać następujące elementy:

1. Parametry badanego obiektu: długość belki (mierzona od punktu mocowania w imadle do środka masy skupionej), wariant (z kostką prostopadłościenną na końcu czy koniec swobodny), oraz długość belki zadana przez prowadzącego do obliczenia częstości drgań własnych na podstawie modelu zidentyfikowanego przez studenta podczas wykonywania ćwiczenia;
2. Poziom kilku najwyższych prążków widmowych (w decybelach) wraz z odpowiadającymi im numerami (częstotliwościami środkowymi) filtrów analizatora;
3. Rzeczywistą częstotliwość drgań własnych badanego układu (określoną przez pomiar) z dokładnością do 0.5 [Hz];
4. Częstotliwości drgań własnych dwóch modeli dynamicznych (wraz z obliczeniami);
5. Porównanie wyników obliczeń teoretycznych z wynikiem eksperymentu wraz z interpretacją ewentualnych rozbieżności;
6. Wybrany do zidentyfikowania model wraz z uzasadnieniem wyboru;
7. Obliczoną (zidentyfikowaną) wartość wybranego parametru modelu wraz z prezentacją sposobu obliczeń.
8. Obliczoną dla długości belki zadanej przez prowadzącego częstotliwość drgań własnych obiektu.

Podstawy modelowania i identyfikacji

We współczesnych konstrukcjach maszyn wyraźnie daje się zauważyć tendencję do minimalizacji materiałochłonności, a tym samym do obniżania współczynników bezpieczeństwa. Postępowanie takie ze zrozumiiałych względów wymaga doskonalenia metod obliczeniowych oraz precyzyjnego uwzględniania efektów dynamicznych. Konstrukcje "lekkie" są bowiem bardziej podatne, zatem w takich konstrukcjach o zniszczeniu zaczynają decydować odciążenia dynamiczne.

Podstawowym narzędziem pracy inżyniera staje się coraz częściej wszechstronna analiza modelu matematycznego wspomaganą symulacją komputerową i procedurami optymalizacyjnymi. Należy jednak zdawać sobie sprawę, że nawet najbardziej wyrafinowany model matematyczny nigdy nie jest idealny, a sumaryczny błąd może nawet wzrastać wraz ze wzrostem stopnia komplikacji modelu. Tym samym zachodzi konieczność konfrontacji modelu z rzeczywistością, odpowiednie jego skorygowanie i dalsze wnioskowanie na podstawie analiz modelu "poprawionego". Postępowanie takie nazywamy identyfikacją.

Spróbujmy teraz nieco ściślej zdefiniować problem. Załóżmy, że dysponujemy modelem matematycznym konstrukcji wyrażającym się układem równań różniczkowych:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) \quad (\text{II.9.1})$$

gdzie:

M - macierz bezwładności,
 K - macierz tłumienia,
 C - macierz sztywności,
 P - wektor wymuszeń.

Rozwiązaniem tego układu jest zbiór funkcji $X(t)$ zależnych od współczynników układu (sztywności, sprężystości, tłumienia):

$$X_i = f(t, m_1 \dots m_n, k_1 \dots k_n, c_1 \dots c_n) \quad (\text{II.9.2})$$

Wszystkie wymienione współczynniki obarczone są pewnym błędem; ponadto sam model dynamiczny stanowi pewne uproszczenie rzeczywistości. Jeżeli teraz dokonamy pomiaru wybranej współrzędnej X_{m_i} i porównamy z funkcją obliczoną, otrzymamy różnicę określającą sumaryczny błąd modelu:

$$X_{m_i}(t) - X_i(t) = \Delta X(t) \quad (\text{II.9.3})$$

Zadaniem identyfikacji jest taki dobór (korekta) pewnej liczby współczynników, by błąd określony wzorem (II.9.3) był minimalny dla interesującego nas przedziału czasowego:

$$\left(\bigwedge_{t \in T} [X_{m_i}(t) - X_i(t, m_p, k_p, c_i)] \rightarrow \min. \right) \Rightarrow m_p, k_p, c_i \quad (\text{II.9.4})$$

Liczba możliwych do określenia współczynników równa jest liczbie równań (II.9.4), a tym samym liczbie punktów pomiarowych. W praktyce operowanie równaniami (II.9.4) bywa trudne lub niemożliwe ze względu na trudności z odejmowaniem funkcji mogących dość istotnie różnić się kształtem. Dlatego też kluczowym problemem staje się zdefiniowanie odległości (metryki) pomiędzy X_{m_i} i X_i , co pozwala na sprowadzenie problemu do układu nierówności (równań) algebraicznych:

$$\varrho (X_{m_i}(t) ; X_i(t, m_p, k_p, c_i)) \leq \varrho_w \quad (\text{II.9.5})$$

gdzie: ϱ_w - przyjęty dopuszczalny błąd identyfikacji.

Podczas ćwiczenia praktyczna procedura identyfikacyjna jest realizowana na przykładzie prostego modelu o jednym stopniu swobody bez tłumienia. Jedyną komplikacją polega na obliczaniu efektywnej sztywności.

Ograniczając się do obliczenia i zmierzenia drgań swobodnych dysponujemy prostym równaniem oscylatora harmonicznego:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{II.9.6})$$

dla którego równanie (II.9.4) wygląda następująco:

$$\bigwedge_{t \in T} [X_m - a \cdot \cos(\omega(k, m)t + \Phi)] \rightarrow \min. \quad (\text{II.9.7})$$

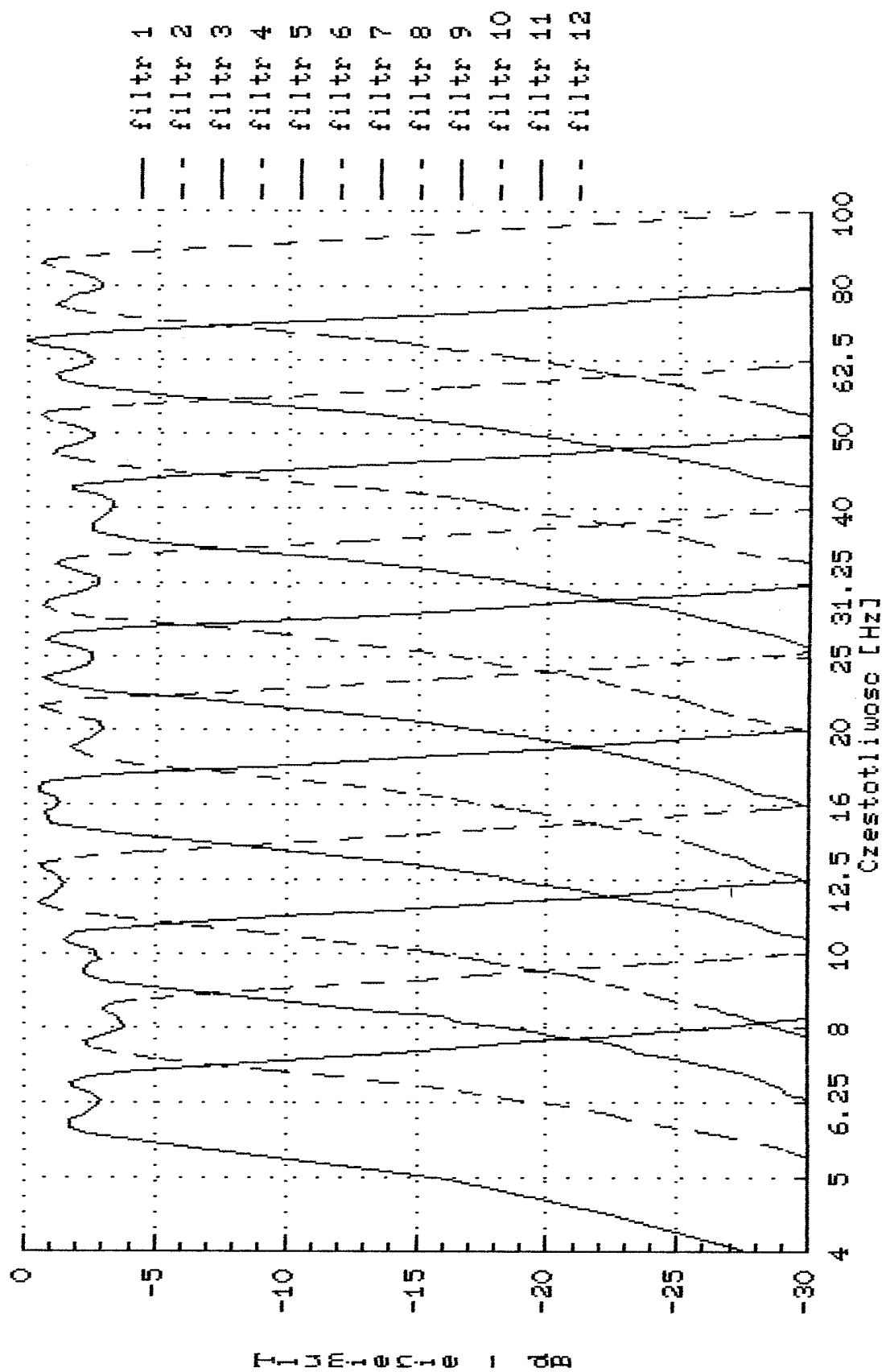
Wprowadzając jako odległość pomiędzy X_m i X moduł z różnicy częstości własnych¹ możemy sprowadzić zagadnienie do postaci:

$$(\varrho(x, m_m) = | \omega(k, m) - \omega_m | = 0) \rightarrow k \cup m \quad (\text{II.9.8})$$

Znak "lub" podyktowany jest faktem, że dysponując jednym równaniem możemy wyznaczyć jeden parametr.

¹Można sprawdzić, że $|\omega_i - \omega_j|$ spełnia aksjomaty metryki w przestrzeni funkcji harmonicznnych o tej samej amplitudzie i fazie początkowej.

CHARAKTERYSTYKI KOLEJNYCH FILTRÓW

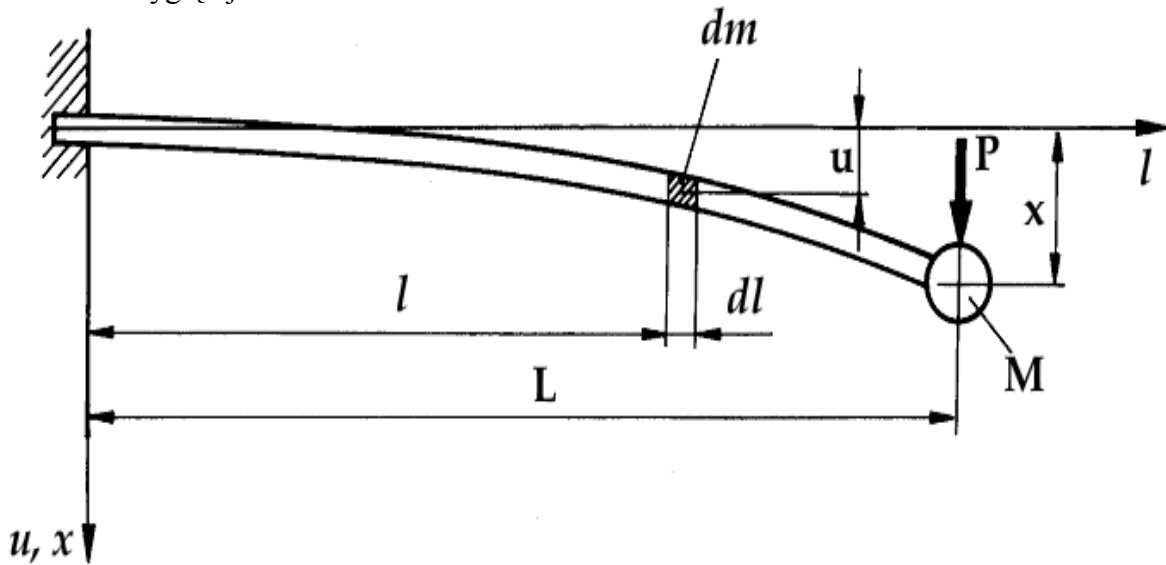


Rys. II.9.2 Charakterystyki tłumienia kolejnych filtrów analizatora FSDN.

Równanie ruchu drgającej belki

Rozważmy drgania swobodne belki, której jeden koniec jest sztywno zamocowany, natomiast na drugim została przymocowana dodatkowa masa (rysunek II.9.3). Ponieważ interesuje nas wyznaczenie podstawowej częstotliwości drgań własnych, dla której długość fali będzie duża w porównaniu z poprzecznymi wymiarami belki, analizę modelu drgań giętych możemy przeprowadzić według elementarnej teorii zginania. Jak wiadomo teoria ta oparta jest na następujących hipotezach:

- naprężenia normalne w przekrojach równoległych do osi belki równają się zeru;
- płaskie przekroje poprzeczne belki po odkształceniu pozostają nadal płaskie i prostopadłe do wygiętej osi belki.



Rys. II.9.3 Model drgającej belki.

Pomijając tłumienie w układzie oraz opór ośrodka możemy wyprowadzić równanie ruchu przy założeniu zachowania energii (układ konserwatywny). Dla analizowanego przez nas modelu na całkowitą energię układu złożą się: energia kinetyczna masy dodatkowej, energia kinetyczna drgającej belki, oraz energia potencjalna odkształcenia.

Załóżmy, że belka została wychylona początkowo z położenia równowagi i tym samym do układu została dostarczona energia początkowa E_0 . Po wprowadzeniu układu w ruch drgający, energia całkowita układu w dowolnej chwili czasowej t (na przykład w położeniu jak na rysunku II.9.3), składa się z energii kinetycznej masy skupionej na końcu belki, energii kinetycznej drgającej belki oraz energii (potencjalnej) sprężystości belki.

Prędkość bryły o masie M . wynosi:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (\text{II.9.9})$$

zatem energię kinetyczną masy M . określa zależność:

$$E_k = \frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2}M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (\text{II.9.10})$$

Element masy belki dm oddalony od punktu zamocowania o odcinek l porusza się z prędkością:

$$v_l = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{II.9.11})$$

Ponieważ masa elementu jest równa

$$dm = q dl \quad (\text{II.9.12})$$

gdzie: q - gęstość liniowa belki;
zatem energia kinetyczna drgającej belki o długości L wyniesie:

$$E'_k = \int_m \frac{v_l^2}{2} dm = \int_0^L \frac{1}{2} q dl \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{II.9.13})$$

W położeniu określonym ugięciem x (rys. II.9.3) odkształcona belka posiada pewną ilość energii sprężystej (potencjalnej), równą pracy statycznie działającej siły P na drodze x :

$$V = \frac{Px}{2} \quad (\text{II.9.14})$$

Dla analizowanego modelu zależność między siłą P i strzałką ugięcia x określona jest wzorem:

$$x = \frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{II.9.15})$$

gdzie:

E - moduł Younga materiału belki;

I - moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej.

Po wyznaczeniu z zależności (II.9.15) siły P :

$$P = \frac{3EI}{L^3} x \quad (\text{II.9.16})$$

i podstawieniu jej do wzoru (II.9.14) otrzymamy:

$$V = \frac{3EI}{2L^3} x^2 \quad (\text{II.9.17})$$

Energię całkowitą układu określi równanie (II.9.18) zawierające trzy zmienne (x , u oraz t), oraz powstałe przez zsumowanie wielkości danych zależnościami (II.9.10, II.9.13, II.9.17):

$$E_c = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \int_0^L \frac{1}{2} q dl \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{3EI}{2L^3} x^2 = \text{const} \quad (\text{II.9.18})$$

Dla uproszczenia zadania założymy, że linia ugięcia w czasie drgań ma ten sam charakter co linia ugięcia belki obciążonej siłą skupioną przyłożoną na końcu.² Tym samym linia ugięcia będzie funkcją tylko jednej zmiennej, strzałki ugięcia w punkcie przyłożenia siły. Rozwiązując

² R. Kurowski, M.E. Niegodziński: Wytrzymałość materiałów. PWN, Warszawa 1986.

równanie różniczkowe linii ugięcia zginanej belki dla analizowanego przypadku podparcia i obciążenia (rysunek II.9.3), otrzymamy:

$$EI \frac{d^2 u}{dl^2} = P(L-l) \quad (\text{II.9.19})$$

Po dwukrotnym scałkowaniu powyższego równania i ustaleniu z warunków podparcia, że

$$\text{dla } l=0 \Rightarrow \frac{du}{dl} = 0, \text{ oraz } u=0$$

otrzymamy:

$$EIu = \frac{Pl^2L}{2} - \frac{Pl^3}{6} = \frac{P}{6} (3l^3L - l^3) \quad (\text{II.9.20})$$

Ponieważ naszym celem jest wyrażenie współrzędnej u przez strzałkę ugięcia x , zatem przekształcając (II.9.16) możemy zapisać:

$$P = ax \quad (\text{II.9.21})$$

gdzie:

$$a = \frac{3EI}{L^3} \quad (\text{II.9.22})$$

Podstawienie (II.9.21) pozwala otrzymać zależność (II.9.20) w postaci:

$$EIu = \frac{ax}{6} (3l^2L - l^3) \quad (\text{II.9.23})$$

Ponieważ zmienna l nie zależy od czasu, zatem po zróżniczkowaniu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{EI} \frac{a}{6} \frac{dx}{dt} (3l^2L - l^3) \quad (\text{II.9.24})$$

Podstawiając (II.9.24) do wyrażenia określającego wielkość energii kinetycznej belki (II.9.13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E'_k &= \int_0^L \frac{1}{2} q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dl = \int_0^L \frac{1}{2} q \frac{1}{(EI)^2} \frac{a^2}{36} (3l^2L - l^3)^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dl = \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} q \frac{1}{(EI)^2} \frac{a^2}{36} (9l^4L^2 + l^6 - 6l^5L) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dl \end{aligned} \quad (\text{II.9.25})$$

Po scałkowaniu i podstawieniu a zgodnie z (II.9.22) równanie (II.9.25) przyjmuje postać (II.9.26).

$$E'_k = \frac{1}{2} q \frac{1}{4L^6} \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{7} - \frac{6}{6} \right) L^7 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{33}{140} \frac{ql}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (\text{II.9.26})$$

Równanie (II.9.18) po uwzględnieniu (II.9.26) przedstawiono poniżej:

$$\frac{1}{2}M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{33}{140} \frac{qL}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{3EI}{2L^3} x^2 = \text{const} \quad (\text{II.9.27})$$

Jednokrotne różniczkowanie po czasie, a następnie skrócenie przez $\frac{dx}{dt}$ daje w efekcie:

$$\left(M + \frac{33}{140} qL \right) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3EI}{L^3} x = 0 \quad (\text{II.9.28})$$

Jest to dobrze znane równanie ruchu oscylatora harmonicznego opisane wzorem (II.9.6), gdzie m . to masa zredukowana do końca belki zgodnie z (II.9.29),

$$m = M + \frac{33}{140} qL \quad (\text{II.9.29})$$

natomiast sztywność belki zginanej k dana jest zależnością (II.9.30):

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (\text{II.9.30})$$

Uwzględnienie jednolicie rozłożonej masy belki dało w efekcie poprawkę, o jaką należy zwiększyć masę skupioną na końcu. Częstość własną takiego układu określa wzór:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{3EI}{\left(M + \frac{33}{140} qL \right) L^3}} \quad (\text{II.9.31})$$