

**Zbigniew Dąbrowski, Jacek Dziurdź,  
Grzegorz Klekot, Stanisław Radkowski**

**Laboratorium podstaw pomiarów  
wielkości dynamicznych**  
**Część I: Wiadomości podstawowe**

(do użytku wewnętrznego)

Redakcja: Grzegorz Klekot

Opracowanie graficzne: Piotr Deuszkiewicz & Andrzej Rudziński

## Przedmowa

Współczesna metrologia mechaniczna stała się wiedzą obejmującą szereg zagadnień technicznych i łączącą wiele dyscyplin. Umiejętność dobrego wykorzystania suwmiarki, kątomierza i dynamometru nie wystarcza dzisiaj do rozwiązywania zadań związanych z konstruowaniem i eksploatacją maszyn.

Konstrukcja współczesnych przyrządów do pomiarów wielkości dynamicznych integruje wiedzę z zakresu mechaniki, elektroniki, matematyki i, coraz częściej, informatyki. Aparatura pomiarowa, mimo zaawansowanej technologii, jest zwykle nieskomplikowana w obsłudze, nastawiona na łatwość użytkowania. Niemniej poprawność wykonania pomiarów oraz interpretacja wyników wymagają od użytkownika znajomości podstawowych zasad obsługi, oraz wiedzy o badanych zjawiskach i metodach pomiaru.

Celem wszystkich ćwiczeń realizowanych w naszym laboratorium jest właśnie wykształcenie tych podstawowych umiejętności. Wiedza i umiejętności tu zdobyte mają przysłużyć inżynierom umożliwić praktyczne wykorzystanie pomiarów wielkości dynamicznych oraz pozwolić na krytyczną analizę obserwowanych zjawisk.

Podręcznik przeznaczony jest dla studentów kierunku "Mechanika" i zawiera podstawowe wiadomości z zakresu pomiarów wielkości dynamicznych niezbędne do wykonania ćwiczeń laboratoryjnych oraz opis ćwiczeń. Adresowany jest przede wszystkim do studentów III roku Wydziału Samochodów i Maszyn Roboczych. Część informacji może być pomocna także podczas studiowania innych przedmiotów specjalizacji ekologia i eksploatacja maszyn.

W laboratorium, oprócz materiału opisanego w skrypcie, obowiązują podstawowe wiadomości z matematyki i fizyki objęte programem szkoły średniej i wykładane na pierwszych latach studiów technicznych. Zakres materiału dostosowany jest do aktualnie obowiązującego programu nauczania na Wydziale.

Układ treści ułatwia korzystanie z podręcznika. Część I zawiera wiadomości podstawowe użyteczne podczas wykonywania ćwiczeń laboratoryjnych, oraz jako literatura uzupełniająca do innych przedmiotów. W części II opisano ćwiczenia laboratoryjne, odwołując się jednocześnie do treści części pierwszej. **Obowiązuje zasada, że do wykonania ćwiczeń bardziej zaawansowanych obowiązuje pełen zakres wiadomości wcześniejszych.**

Podstawą zaliczenia laboratorium jako całości jest wykonanie wszystkich przewidzianych programem danego semestru ćwiczeń. Ćwiczenia mogą być realizowane wielowariantowo (od 2 do 4 godzin). Każdy student realizuje zadanie indywidualnie, a oceniany jest uzyskany wynik pomiaru lub analizy i sformułowane na tej podstawie wnioski dotyczące ćwiczenia. Sprawdzenie przygotowania przed rozpoczęciem pomiarów nie stanowi podstawy zaliczenia, a jedynie pomaga w uporządkowaniu wiedzy zdobytej w ramach przygotowania do ćwiczenia.

## Część I - Wiadomości podstawowe

### 1. Wprowadzenie

"Międzynarodowy słownik terminów metrologicznych" [1] definiuje **wielkość** jako cechę zjawiska, ciała lub substancji, którą można wyróżnić jakościowo i wyznaczać ilościowo. Zgodnie z taką definicją **wielkości dynamiczne** są cechami, których chwilowe wartości ulegają zmianom.

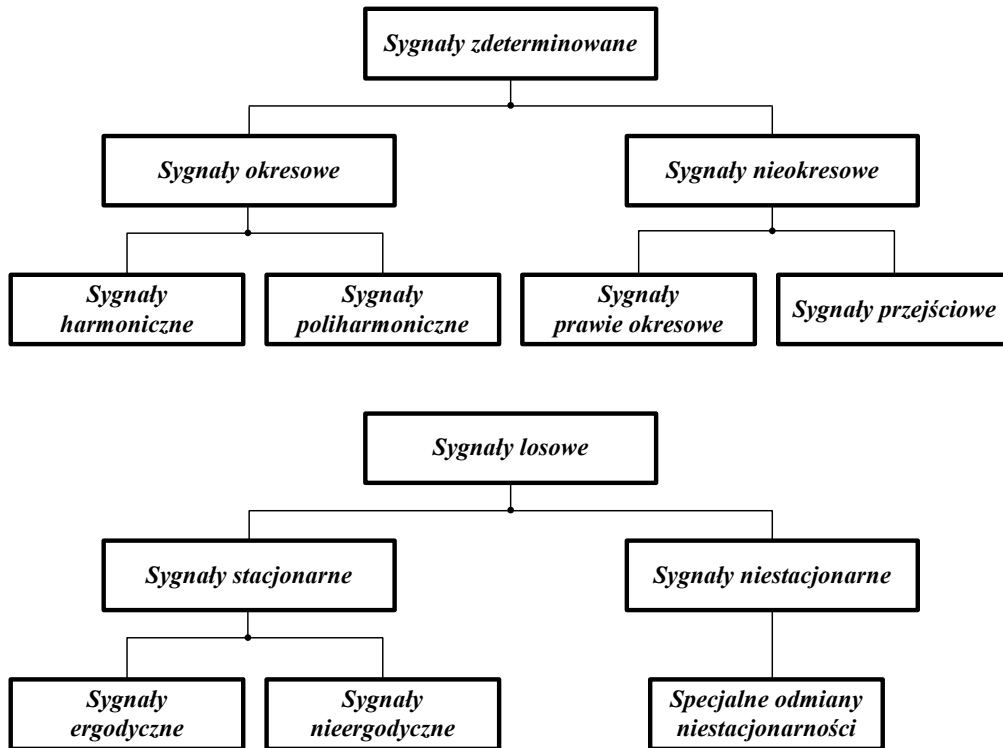
**Pomiar**, zgodnie z definicją słownikową, to zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości. W praktyce pomiar polega na porównaniu wielkości obserwowanej z wzorcową, często z wykorzystaniem specjalistycznej aparatury.

Podczas obserwacji zjawisk mechanicznych analizuje się parametry ruchu (prędkość, przyspieszenie, przemieszczenie), zmiany ciśnienia, siły, naprężeń, odkształceń i.t.p. Niektóre z nich zmieniają się na tyle powoli, że można je obserwować bezpośrednio, wykorzystując wyłącznie ludzkie zmysły. Inne wymagają narzędzi specjalistycznych, przetwarzających wybrane parametry do postaci czytelnej dla człowieka. Do tej właśnie grupy zaliczymy wszystkie zjawiska szybkozmienne, w tym takie, z analizy których nie może zrezygnować współczesny inżynier mechanik.

Najczęściej analizowanym parametrem jest amplituda (zmiana amplitudy) cech charakterystycznych dla badanego zjawiska. Do wnioskowania o charakterze procesów wolnozmiennych wystarczy co pewien czas zmierzyć chwilową wartość amplitudy. Trudno natomiast wyciągać wnioski na podstawie chwilowych amplitud przebiegów dynamicznych. Badanie zjawisk szybkozmiennych wymaga operowania wartościami uśrednionymi. Istotnym jest, by wybór sposobu uśredniania ukierunkować na uzyskanie możliwie najlepszego obrazu cech charakteryzujących analizowany proces.

## 2. Rodzaje sygnałów dynamicznych

Istnieje szereg sposobów klasyfikacji sygnałów. Dla potrzeb pomiarów najbardziej użyteczny wydaje się podział na dwie główne grupy, szerzej opisany przez J. S. Bendat'a i A. G. Piersol'a [2]. Pierwszą z grup tworzą sygnały losowe, drugą - zdeterminowane. Schemat klasyfikacji wewnątrz każdej grupy przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Rodzaje sygnałów.

Ze względu na powszechność zastosowań w opisie modelowym wielu obiektów technicznych zwróćmy szczególną uwagę na należące do grupy zdeterminowanych sygnały okresowe. Przebieg jest okresowy, jeżeli można go opisać funkcją  $x(t)$ , dla której istnieje taka dodatnia wielkość  $T$ , że w każdej chwili  $t$

$$x(t+nT)=x(t)$$

Wielkość  $T$ , dla której zachodzi powyższa równość, nazywana jest okresem, zaś część przebiegu przypadająca na jeden okres zwana jest cyklem.

Odwrotność okresu, czyli ilość cykli w jednostce czasu, to częstość (częstotliwość):

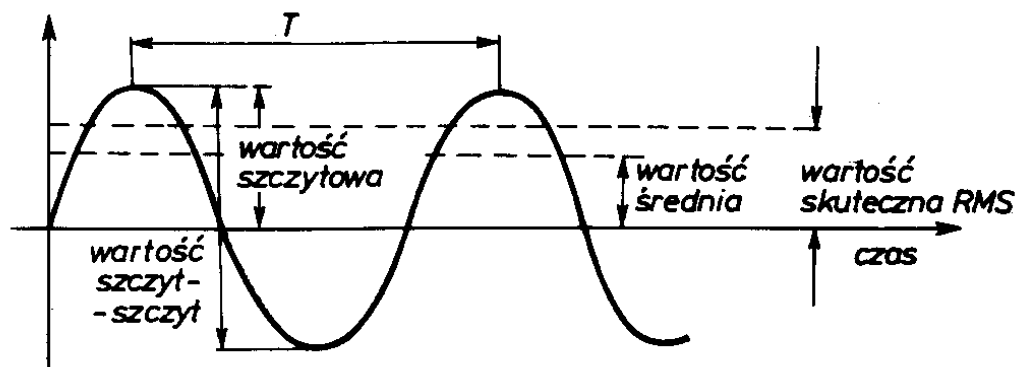
$$f = \frac{1}{T}$$

Najważniejszym (z punktu widzenia teorii przetwarzania sygnałów) przypadkiem szczególnym sygnałów okresowych są przebiegi harmoniczne opisane zależnością:

$$x(t) = a \sin(2\pi ft + \Phi)$$

gdzie:  $a$  - amplituda,  
 $2\pi ft$  - faza chwilowa,  
 $\Phi$  - faza początkowa.

Kształt przebiegu harmonicznego i jego parametry ilustruje rysunek 2.



Rys. 2. Parametry charakterystyczne przebiegu harmonicznego.

Przebiegi poliharmoniczne składają się z kilku (wielu) harmonicznymi o różnych amplitudach i fazach początkowych. Najprostszy przebieg poliharmoniczny będzie wyrażony jako suma dwóch składowych harmonicznymi. Taki przykład użyto między innymi do zilustrowania zasady działania filtrów (rysunek 6).

Sygnaly prawie okresowe powstają przez zsumowanie kilku (wielu) harmonicznymi o częstotliwościach, których co najmniej jeden iloraz jest liczbą niewymierną.

Sygnaly przejściowe (nieustalone) są opisane ściśle formułami matematycznymi innymi od omówionych dotychczas, nie będąc zarazem okresowymi. Przykładem może być impuls, wymuszenie prostokątne bądź proces opisany funkcją wykładniczą.

Do grupy sygnalów losowych zaliczymy wszystkie nie dające się opisać jednoznacznie zależnościami matematycznymi ze względu na fakt, że konkretna obserwacja daje tylko jeden z wielu możliwych rezultatów. Pojedyncze funkcje czasu opisujące zjawisko losowe zwane są realizacjami lub funkcjami losowymi. Realizacja w skończonym przedziale czasu to sygnał obserwowany.

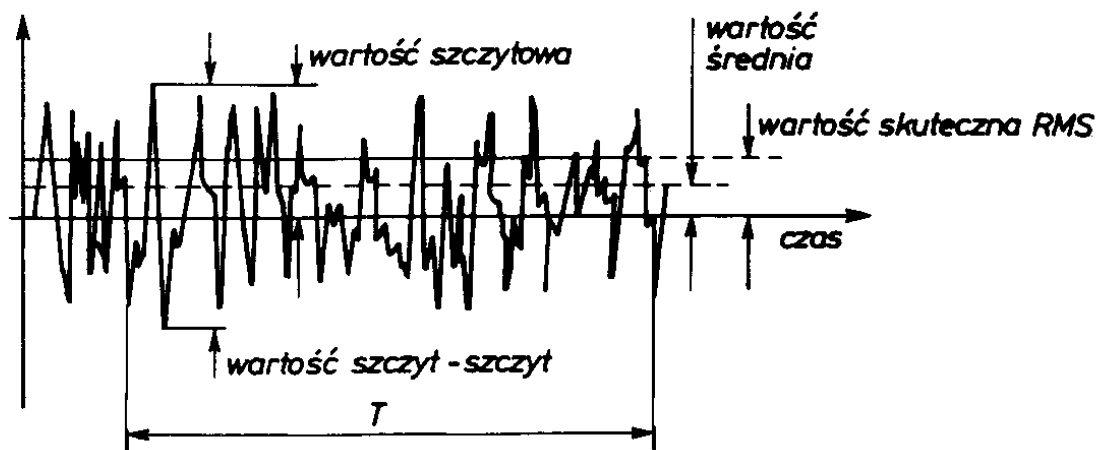
Wśród sygnalów losowych zwróćmy uwagę na sygnaly stacjonarne, a zwłaszcza stacjonarne i ergodyczne. Stacjonarność polega na identycznych wartościach średniej i funkcji autokorelacji procesu losowego w kolejnych chwilach czasowych.

Ergodyczność zawęża grupę procesów stacjonarnych do takich, których funkcja autokorelacji i wartość średnia są identyczne dla wszystkich realizacji. Wynika stąd, że o parametrach procesów stacjonarnych i ergodycznych zarazem można wnioskować na podstawie konkretnych pojedynczych realizacji. Szerzej omówiono to w podręcznikach specjalistycznych, na przykład w [3].

Przedstawiony skrótowo opis sygnalów różnych typów wypada uzupełnić spostrzeżeniem, że praktycznie wszystkie sygnaly generowane przez obiekty techniczne i spotykane realnie są w rzeczywistości losowe. W badaniach tych sygnalów składowa losowa jest często pomijana ze względu na jej niewielki udział energetyczny w całości zjawiska. Istnieją również specjalistyczne techniki przetwarzania sygnalów służące eliminacji elementów losowych. Takie postępowanie służy ułatwieniu interpretacji analizowanych przebiegów i może ułatwić modelowanie zjawisk.

### 3. Podstawowe parametry sygnału

Pełną informację o zachodzących procesach daje obraz zmian parametrów w czasie. Oznacza to, że dla poznania istoty zjawiska należałoby nieustannie obserwować zmiany wartości chwilowej. O ile realne jest to dla zjawisk wolnozmiennych, to wnioskowanie na podstawie wartości chwilowej przebiegów dynamicznych przekracza ludzkie możliwości postrzegania. Dlatego często istnieje konieczność posłużenia się swego rodzaju wartościami zastępczymi (zwykle uśrednionymi), które pozwalają na ilościowy opis zjawiska.



Rys. 3. Charakterystyczne parametry przebiegu dynamicznego.

Rysunek 3 przedstawia przykład konkretnej realizacji pewnego procesu. Na podstawie analizy zmian parametru  $x$  w czasie  $T$  można wyjaśnić pojęcia kilku wartości charakterystycznych.

Wartość średnia danego sygnału  $x(t)$  zdefiniowana jest wyrażeniem:

$$x_{\bar{s}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

gdzie:  $T$  - czas uśredniania.

Tak określona średnia jest mało przydatna do wnioskowania o procesach dynamicznych, informuje przede wszystkim o składowej stałej.

W badaniach zjawisk szybkozmiennych częściej znajduje zastosowanie moduł wartości średniej (potocznie nazywany również wartością średnią):

$$\bar{x}_{\bar{s}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$$

Najpowszechniej stosowanym parametrem jest wartość skuteczna  $x_{RMS}$  (ang. Root Mean Square Value), będąca pierwiastkiem z wartości średniokwadratowej:

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t))^2 dt}$$

Wartość skuteczna niesie informację o energii zjawiska, a jednocześnie ma wymiar wielkości fizycznej - stąd jej duża przydatność w badaniu procesów szybkozmiennych.

Wartość średniokwadratowa (bez pierwiastka) zwana bywa niekiedy „amplitudą mocy”. Zwykle jest wprost proporcjonalna do energii zjawiska, definiowana jako kwadrat wartości skutecznej:

$$x_{PWR} = x_{RMS}^2$$

Podczas analiz krótkich impulsów o znacznej energii celowe jest określenie największej chwilowej amplitudy. Ten parametr nazywa się "wartością szczytową"  $x_{PEAK}$  (lub szczyt-szczyt) i nie uwzględnia historii czasowej zjawiska.

Między wartościami: skuteczną, szczytową i średnią przebiegu harmonicznego (czyli takiego, w którym amplituda zmienia się sinusoidalnie) gdy czas uśredniania  $T$  jest całkowitą wielokrotnością okresu, zachodzi zależność:

$$x_{RMS} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \bar{x}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} x_{PEAK}$$

Parametry przebiegu harmonicznego przedstawiono na rysunku 2.

W praktyce pomiarowej zwykle stosowane są trzy stałe czasowe uśredniania:

- FAST (szybko)  $T = 125$  ms,
- SLOW (wolno)  $T = 1000$  ms,
- IMPULSE:  $T = 35$  ms dla sygnału narastającego,  
 $T = 1500$  ms dla sygnału malejącego.

Większość współczesnych specjalizowanych mierników może realizować uśrednianie według wszystkich trzech przedstawionych stałych czasowych. Coraz częściej możliwości pomiarowe są rozszerzane o nowe specyficzne funkcje. Jako przykład można wymienić zapamiętanie najwyższej zmierzonej wartości przy charakterystyce impulsowej (tzw. IMPULSE HOLD), zapamiętanie najwyższej (najniższej) wartości skutecznej w trakcie sesji pomiarowej itp.

Uśrednianie odbywa się numerycznie, po wcześniejszym przetworzeniu sygnału do postaci cyfrowej, lub analogowo (głównie przez mierniki starszej generacji).

Duża rozpiętość mierzonych wartości (tak zwana dynamika) sprawia, że w pomiarach wielkości dynamicznych często posługujemy się względną skalą logarytmiczną zwaną decybelową. Początek takiej skali (0 decybeli) to pewna umowna wartość przyjęta za poziom odniesienia.

Skala decybelowa zdefiniowana jest następująco:

$$L = 10 \lg \left( \frac{x_{PWR}}{x_{oPWR}} \right) \quad [dB]$$

$L$  - poziom wyrażony w decybelach,

$x_{PWR}$  - kwadrat wartości skutecznej (proporcjonalny do energii rozważanego procesu),

$x_{oPWR}$  - przyjęty poziom odniesienia.

Przyjęto, że poziom wyrażony w decybelach powstaje zwykle przez zlogarytmowanie wielkości fizycznych wprost proporcjonalnych do energii procesu (na przykład natężenie dźwięku, energia drgań itp.). Gdy kwadrat wielkości fizycznych jest wprost proporcjonalny do energii procesu (na przykład przemieszczenie, przyspieszenie, prędkość, ciśnienie akustyczne), powyższy wzór przyjmie postać:

$$L = 20 \lg \left( \frac{x_{RMS}}{x_{oRMS}} \right) \quad [dB]$$



Powszechność stosowania skali decybelowej doprowadziła do zdefiniowania poziomów odniesienia niektórych wielkości mechanicznych. Zależności służące obliczaniu poziomu wyrażonego w decybelach oraz wartości odniesienia wybranych wielkości mechanicznych zestawiono w tabeli.

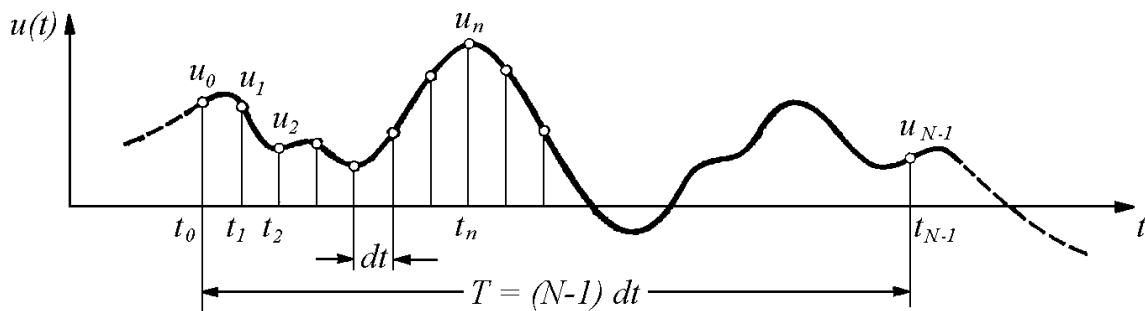
**Sposoby obliczania poziomów i umowne wartości poziomu odniesienia**

Nazwa	Definicja	Poziom odniesienia
przemieszczenie	$L_d = 20 \lg \left( \frac{x}{x_o} \right)$ dB	$x_o = 10^{-11}$ m.
prędkość	$L_v = 20 \lg \left( \frac{v}{v_o} \right)$ dB	$v_o = 10^{-8}$ m/s
przyspieszenie	$L_a = 20 \lg \left( \frac{a}{a_o} \right)$ dB	$a_o = 10^{-5}$ m/s <sup>2</sup>
siła	$L_P = 20 \lg \left( \frac{P}{P_o} \right)$ dB	$P_o = 10^{-6}$ N
energia	$L_E = 10 \lg \left( \frac{E}{E_o} \right)$ dB	$E_o = 10^{-12}$ J
poziom ciśnienia akustycznego (gazy)	$L_p = 20 \lg \left( \frac{p}{p_o} \right)$ dB	$p_o = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa
poziom ciśnienia akustycznego (ciecze)	$L_p = 20 \lg \left( \frac{p}{p_o} \right)$ dB	$p_o = 10^{-6}$ Pa
poziom mocy akustycznej	$L_N = 10 \lg \left( \frac{N_a}{N_o} \right)$ dB	$N_o = 10^{-12}$ W
poziom natężenia dźwięku	$L_I = 10 \lg \left( \frac{I_a}{I_o} \right)$ dB	$I_o = 10^{-12}$ W/m <sup>2</sup>
poziom gęstości energii	$L = 10 \lg \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right)$ dB	$\varepsilon_o = 10^{-12}$ J/m <sup>3</sup>

#### 4. Próbkowanie i kwantowanie

Postęp w technice komputerowej spowodował wzrost zastosowań cyfrowych metod przetwarzania sygnałów, które wypierają metody analogowe. Podstawą technik cyfrowych jest dyskretyzacja, czyli zastąpienie przebiegu ciągłego o amplitudach ze zbioru liczb rzeczywistych zbiorem wartości dyskretnych odwzorowujących położenie kolejnych punktów w czasie. Z operacją dyskretyzacji związane są dwa pojęcia: próbkowanie i kwantowanie.

**Próbkowanie** polega na odczytywaniu amplitudy chwilowej (pobieraniu próbek amplitudy) z ustalonym krokiem czasowym. Teoretycznie proces próbkowania można traktować jako mnożenie ciągłego przebiegu  $x(t)$  przez funkcję próbkującą. Praktycznie w procesie próbkowania oś czasu jest zastępowana wektorem równoodległych punktów. Kolejnym punktem na osi czasu  $t_n$  [s] odpowiadają wartości amplitudy sygnału  $u_n$ . Istota próbkowania została przedstawiona na rysunku 4.



Rys. 4. Próbkowanie sygnału ciągłego.

Podstawowe parametry próbkowania przebiegu ciągłego w dziedzinie czasu to:

- $dt$  - rozdzielczość czasowa (odległość kolejnych punktów czasowych, długość kroku czasowego) [s],
- $T$  - czas trwania próbki [s].

Zwykle przetwarzana jest próbka o określonej długości, wówczas  $N$  - oznacz liczebność (ilość punktów, długość) próbki czasowej.

W dziedzinie częstotliwości definiuje się dodatkowo:

- $f_N$  - częstotliwość Nyquista (graniczna, składowa sygnału o największej częstotliwości możliwej do zmierzenia) [Hz],
- $f_p$  - częstotliwość próbkowania (częstotliwość z jaką jest pobierana amplituda sygnału analogowego) [Hz],
- $df$  - rozdzielczość częstotliwościowa [Hz].

Wymienione parametry te są powiązane następującymi zależnościami:

$$T = \frac{1}{df}$$

$$dt = \frac{1}{f_p} \quad \text{lub} \quad dt = \frac{T}{N-1}$$

$$t_n = n \cdot dt, \quad \text{gdzie} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$u_n = u(t_n) = u(n \cdot dt), \quad \text{gdzie} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Twierdzenie Nyquista o próbkowaniu mówi, że najwyższa możliwa do zmierzenia częstotliwość składowej sygnału jest co najwyżej równa połowie częstotliwości próbkowania:

$$f_N = \frac{1}{2dt} \quad \text{oraz} \quad f_N = \frac{f_p}{2}$$

Od częstotliwości próbkowania  $f_p$  i długości próbki  $N$  zależy dokładność odwzorowania sygnału. Przyjmuje się, że w przetwarzaniu sygnałów harmonicznym wymagana długość próbki wynosi:

$$N = \frac{m}{\epsilon_r^2}$$

gdzie:

- $m$  - ilość zmierzonych okresów sygnału harmonicznego,
- $\epsilon_r$  - dopuszczalny względny błąd standardowy oszacowania gęstości mocy badanego sygnału.

Często za kryterium określające konieczną długość próbki przyjmuje się minimalną ilość kroków dyskretyzacji ( $n_{min}$ ) przypadającą na jeden okres, która zagwarantuje wierność odwzorowania przebiegu. Z tą wartością wiąże się również dokładność określenia okresu sygnału harmonicznego. Wówczas:

$$N = m \cdot n_{min}$$

Możemy przyjąć, że dla dokładnego przedstawienia przebiegu harmonicznego  $n_{min}$  powinno wynosić co najmniej 100. Ponieważ numeryczne techniki obliczeniowe wykorzystują algebrę binarną,  $N$  zaokrągla się najczęściej w górę, do wartości będącej potęgą liczby 2. Ilość punktów przypadających na jeden okres zdefiniuje zależność:

$$N_0 = \frac{N}{m}$$

W tym wypadku rozdzielczość czasowa wynosi:

$$dt = \frac{t_0}{N_0} = \frac{t_0 m}{N}$$

a częstotliwość próbkowania:

$$f_p = \frac{1}{dt} = \frac{N}{m t_0}$$

Ponieważ w rzeczywistości trudno planować próbkowanie przebiegu tak, by jego okres był całkowitą wielokrotnością rozdzielczości czasowej  $dt$ , zatem w rezultacie przetwarzania cyfrowego otrzymuje się przybliżoną długość okresu, oznaczoną dalej symbolem  $T_c$ . Wielkość ta zawiera się w przedziale:

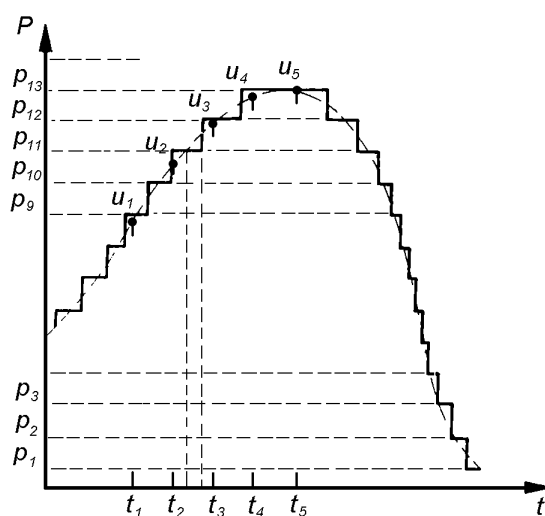
$$T_c = T \pm dt$$

gdzie:

- $T$  - faktyczna długość okresu.

Z powyższego wynika, że błąd wyznaczania długości okresu składowej maleje ze wzrostem częstotliwości próbkowania.

**Kwantowanie** polega na przyporządkowaniu kolejnym wartościom amplitudy wcześniej spróbkowanego przebiegu, określonych poziomów, zwanych poziomami kwantowania. Proces kwantowania jest procesem nieliniowym, dokonywanym w celu przedstawienia numerycznego pewnej wielkości fizycznej, znaczy to, że wartość każdej próbki sygnału jest wyrażona za pomocą liczby całkowitej będącej faktycznie numerem odpowiedniego poziomu kwantowania (najczęściej liczba w systemie dwójkowym). Konieczność skwantowania sygnału wynika z ograniczonej rozdzielczości przetworników analogowo-cyfrowych. Oznacza to, że chwilowe wartości  $u_1, u_2, \dots, u_n$  wyrażone są z dokładnością co do rozdzielczości przetwornika. Innymi słowy, każdą z liczb  $u_1, u_2, \dots, u_n$  reprezentuje po skwantowaniu wartość  $p_1, p_2, \dots, p_k$  stanowiąca zaokrąglenie amplitudy rzeczywistej z niedomiarem. Amplituda skwantowana zmienia się zatem skokowo i przyjmuje wartość odpowiadającą osiągniętemu poziomowi. Skwantowanie amplitudy praktycznie zawsze powoduje nieodwracalną utratę części informacji o sygnale. Fragmenty ciągłe sygnału z przedziałów między kolejnymi poziomami kwantyzacji tworzą tak zwany szum kwantowania. Ilustrację kwantowania sygnału przedstawia rysunek 5.



**Rys. 5.** Kwantowanie sygnału.

Przy kwantowaniu w sposób przedstawiony na rysunku 5 wartość  $u_1$  przyjmuje poziom  $p_9$ ,  $u_2$  - poziom  $p_{10}$ ,  $u_3$  - poziom  $p_{11}$ , a  $u_4$  i  $u_5$  - poziom  $p_{12}$ .

Poprawność przetwarzania cyfrowego zależy od właściwego dla realizowanego zadania pomiarowego doboru parametrów. Ważnym jest między innymi, by amplituda przetwarzanego sygnału mieściła się w pełnym zakresie przetwornika analogowo-cyfrowego. Wiąże się to z postulatem minimalizacji stosunku maksymalnej wartości sygnału cyfrowego do wartości skutecznej szumu kwantowania (po angielsku "Signal-to-Noise Ratio"). Zasada dopasowania zakresu pomiarowego do poziomu mierzonego sygnału stanowi analogię do minimalizacji błędów odczytu i wskazania przez odczyt przy możliwie najwyższym wychyleniu wskazówki (w miernikach analogowych starszej generacji). Ponieważ sygnał analogowy mogący przyjmować nieskończoną liczbę poziomów zostaje przedstawiony przez ograniczony zbiór liczb, to w rezultacie przetwarzania cyfrowego jego postać jest przybliżona i obciążona błędem kwantowania (dokładność tego przybliżenia zależy od liczby poziomów). Ze względu na zapis binarny najczęściej spotykane przetworniki posiadają od 256 do 65536 poziomów (od 8 do 16 bitów). W przypadku zapisu binarnego, wartość skoku kwantowania (szerokość przedziału kwantowania) można przedstawić jako:

$$q = \frac{D_s}{2^{l-1}}$$

gdzie:  $l$  - liczba bitów przetwornika,  
 $D_s$  - zakres dynamiki sygnału wejściowego.

Błąd kwantowania będzie wynosił:

$$\epsilon_q = \pm \frac{q}{2}$$

a dynamika takiego układu:

$$D_l \approx 6l + 4 \text{ [dB]}$$

Po skwantowaniu amplitudy sygnału należy ustalić odpowiednie relacje pomiędzy danymi cyfrowymi a wartościami mierzonej wielkości fizycznej, wyrażonymi w odpowiednich jednostkach. Oprogramowanie współczesnego sprzętu pomiarowo-przetwarzającego umożliwia pełną automatyzację tego procesu. Zwykle takie obliczenia są realizowane bez jakiegokolwiek ingerencji użytkownika.

### 5. Elementy i sposoby wykonywania analizy widmowej

Podstawą analizy widmowej jest twierdzenie Fouriera, z którego wynika, że każdą funkcję okresową można przedstawić jako sumę funkcji trygonometrycznych lub wykładniczych (o różnych amplitudach i fazach początkowych).

Na podstawie tego twierdzenia, każdy przebieg okresowy można zapisać jako sumę składowych harmonicznym w postaci sumy szeregu Fourier'a:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi nft + \Phi_n)$$

w powyższym wzorze:

$A_0$  - jest wartością średnią funkcji  $x(t)$ ,

$A_1 \sin(2\pi ft + \Phi_1)$  - pierwszą (podstawową) harmoniczną.

Zastąpienie funkcji trygonometrycznej wykładniczą pozwala zapisać sumę szeregu Fourier'a w postaci zespolonej:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i2\pi nft} \\ \text{gdzie:} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi nft} dt, \\ n &= \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

Przy założeniu nieskończoności okresu, twierdzenie Fourier'a można rozszerzyć również na funkcje nieokresowe. Odpowiednikiem zespolonej postaci szeregu Fourier'a jest wówczas transformata Fouriera zdefiniowana wzorem:

$$G(if) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

Równania te mają sens tylko wtedy, gdy funkcja  $x(t)$  jest całkowna z kwadratem, czyli:

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{- dla funkcji okresowych,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{- dla funkcji nieokresowych.}$$

Fizycznie odpowiada to zjawiskom, których energia jest ograniczona.

Powyższe równanie legło u podstaw analizy widmowej polegającej na zmianie dziedziny opisu sygnału, przekształceniu przez transformację Fourier'a dowolnej funkcji określonej w dziedzinie czasu (na przykład amplitudy wielkości charakteryzującej drgania mechaniczne) do dziedziny częstotliwości. Funkcja  $G(if)$  opisuje ciągłe widmo drgań przebiegu  $x(t)$ . Moduł  $G(if)$  jest, z dokładnością do stałego mnożnika, amplitudą składowych harmonicznych  $x(t)$ . Na podstawie znajomości widma można odtworzyć przebieg czasowy (wykonując odwrotną transformację Fourier'a):

$$x(t) = F^{-1}(G(if)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(if)e^{i2\pi ft} dt$$

W praktyce analiza widmowa pozwala wyodrębnić najbardziej istotne dla rozważanego procesu składowe harmoniczne oraz ustalić wielkości amplitud tych składowych. Określane są amplitudy kolejnych składowych harmonicznych (widmo amplitudowe) i/lub przesunięcia fazowe (widmo fazowe). Dla większości procesów wibroakustycznych, zwłaszcza stacjonarnych i ergodycznych, wystarczające informacje do wnioskowania, odnośnie charakteru zjawisk, zawiera widmo amplitudowe - widmo fazowe bywa określane w odosobnionych przypadkach.

Przy obecnym stanie wiedzy i techniki analizę widmową przebiegów rzeczywistych można wykonywać dwojako: przez numeryczne obliczanie transformaty Fouriera lub przez odwzorowanie własności tej transformaty zespołem filtrów. Każda z metod ma nieco inne własności i ograniczenia.

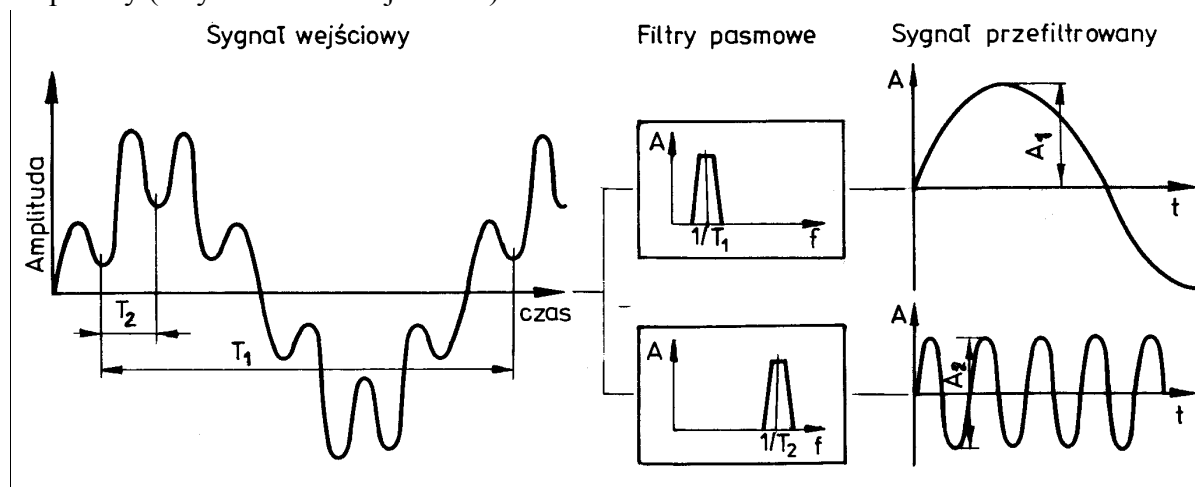
Historyczne uwarunkowania i możliwości techniczne sprawiły, że wcześniej znalazła zastosowanie metoda filtrowania sygnałów. Z jednej strony bowiem podział zakresu dźwięków słyszalnych na pasma w pewnym sensie odwzorowuje własności narządu słuchu, z drugiej zaś wiedza o zjawiskach elektrycznych pozwoliła budować układy filtrów analogowych przed skonstruowaniem pierwszej maszyny cyfrowej.

W technice pomiarowej jest stosowanych kilka rodzajów filtrów:

1. filtr dolnoprzepustowy - przepuszcza sygnał o częstotliwościach mniejszych od określonej częstotliwości zwanej częstotliwością graniczną (górną),
2. filtr górno przepustowy - przepuszcza sygnały o częstotliwościach wyższych od częstotliwości granicznej filtra (dolnej).

3. filtr środkowo przepustowy (pasmowo przepustowy) - można stworzyć z filtrów dolnoprzepustowego i górno przepustowego, przechodzą przez niego sygnały o częstotliwości mieszczącej się w paśmie przepustowym filtru, ograniczonym od dołu dolną częstotliwością graniczną, a od strony wyższych wartości górną częstotliwością graniczną.
4. filtr środkowo zaporowy (pasmowo zaporowy) - analogicznie do filtra środkowo przepustowego, można stworzyć z filtrów dolnoprzepustowego i górno przepustowego, przechodzą przez niego sygnały o częstotliwości mieszczącej się poza pasmem zaporowym filtru, czyli niższe od dolnej częstotliwości granicznej i wyższe od górnej częstotliwości granicznej.

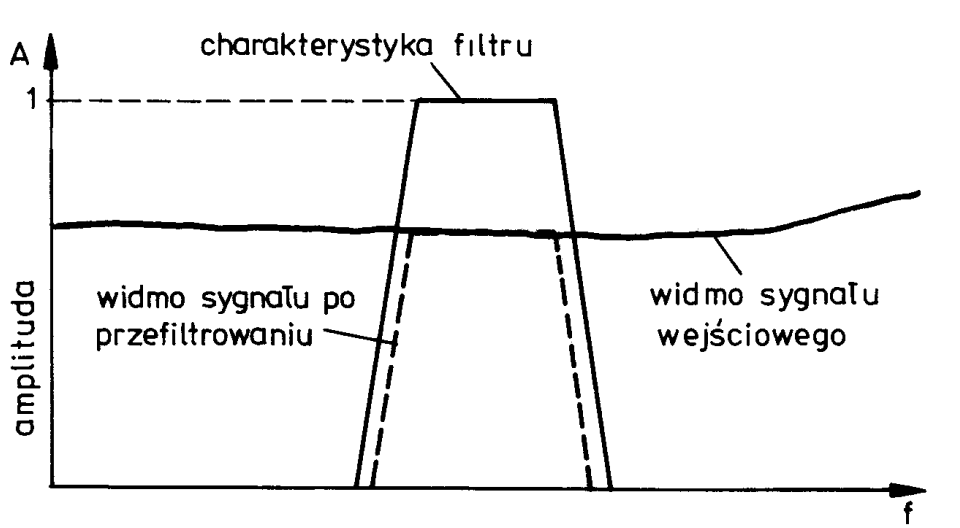
Analiza widmowa metodą filtracji bazuje na analogiach do przekształcenia Fouriera, a sprowadza się do podziału pełnego zakresu częstotliwości na pewną liczbę pasm według przyjętej zasady podziału, i następnie wyznaczenia w każdym paśmie zadanej wartości amplitudy (zwykle skutecznej - RMS).



Rys. 6. Zasada działania filtrów.

Klasyczna metoda otrzymywania widma amplitudowego polega na przepuszczaniu sygnału przez zespół sąsiadujących filtrów pasmowych o środkowych częstotliwościach pokrywających pełen zakres prowadzonej analizy i pomiarze części energii sygnału po przejściu przez kolejne filtry, ewentualnie na określaniu energii pozostałej po filtracji jednym filtrem przestrajalnym (o zmiennej częstotliwości środkowej) przez zadany zakres częstotliwości środkowych. Zasadę uzyskiwania widma przez filtrację zilustrowano na rysunku 6, gdzie przedstawiono przebieg złożony z dwóch składowych harmonicznym, przefiltrowany dwoma filtrami pasmowo przepustowymi o częstotliwościach środkowych pokrywających się z częstotliwościami składowych sygnału.

Amplituda szczytowa sygnału po przejściu przez pierwszy filtr wynosi  $A_1$ , po przejściu przez drugi - odpowiednio  $A_2$ . Dla sygnałów o większej liczbie składowych (harmonicznym lub zaszumionych), ewentualnie przy zastosowaniu filtrów o mniejszej rozdzielczości, amplituda sygnału przefiltrowanego będzie zależała od energii wszystkich składowych znajdujących się w paśmie przepustowym filtru. Działanie filtru polega bowiem na wytłumieniu wszystkich składowych spoza pasma przepustowego.



Rys. 7. Wynik filtracji w dziedzinie częstotliwości.

Jeśli rozważymy zagadnienie filtracji w dziedzinie częstotliwości, to okaże się, że energia mierzona po przejściu sygnału przez filtr wynika z nałożenia charakterystyki amplitudowej filtra na widmo amplitudowe sygnału. Ilustruje to rysunek 7. Energia sygnału wejściowego jest odwzorowana powierzchnią wykresu pod linią ciągłą, natomiast sygnału po przejściu przez filtr o przedstawionej charakterystyce - powierzchnią ograniczoną linią przerywaną.

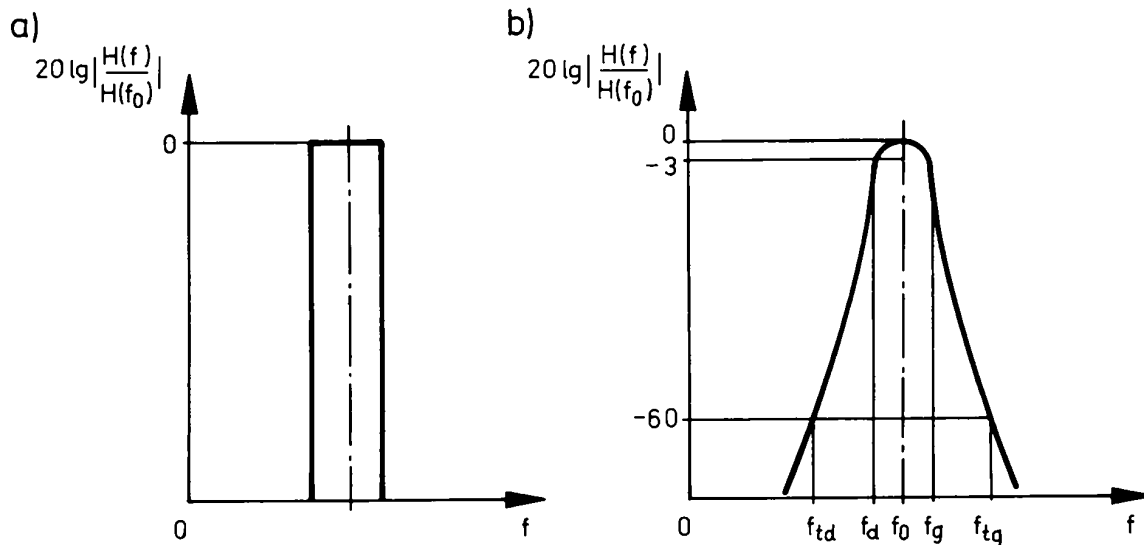
Współcześnie obróbka sygnału czasowego przez filtrację może być realizowana filtrami cyfrowymi (po wcześniejszym przetworzeniu analogowo-cyfrowym), lub filtrami analogowymi.

Filtracja cyfrowa wymaga przetworzenia sygnału analogowego przetwornikiem analogowo-cyfrowym. Specjalistyczne oprogramowanie umożliwia realizację filtrów cyfrowych o parametrach spełniających wytyczne normowe. Tak uzyskane widma mogą być poddawane dalszej obróbce, na przykład statystycznej. Wraz z rozwojem techniki komputerowej filtracja cyfrowa jest coraz częściej stosowana. Nadal jednak analizatory analogowe o filtrach w postaci obwodów elektrycznych odwzorowujących własności transformaty Fourier'a są używane do celów pomiarowo-badawczych. Ponadto, ze względu na szczególne własności wynikające z dyskretyzacji przebiegu ciągłego analizatory cyfrowe posiadają zwykle integralny analogowy filtr dolnoprzepustowy zabezpieczający poprawne działanie części cyfrowej.

Idealny filtr pasmowy powinien posiadać charakterystykę zgodną z rysunkiem 8(a). Oznacza to, że amplituda sygnału harmonicznego o częstotliwości mieszczącej się w paśmie przepustowym powinna po przejściu przez filtr być identyczna jak sygnału wejściowego, natomiast składowe leżące poza pasmem przepustowym powinny zostać całkowicie stłumione. W praktyce nie istnieją techniczne możliwości realizacji takiego filtra, stąd rzeczywiste filtry pasmowe mają charakterystyki zbliżone do przedstawionej na rysunku 8(b). Taka charakterystyka oznacza, że po przefiltrowaniu amplituda sygnału o częstotliwości mieszczącej się między dolną ( $f_d$ ) i górną ( $f_g$ ) częstotliwością przepuszczania może zostać stłumiona najwyżej o 3 decybele, natomiast amplitudy składowych o częstotliwościach w zakresie między dolną ( $f_{id}$ ) a górną ( $f_{ig}$ ) częstotliwościami tłumienia są pomniejszone o ponad 60 dB.

Rozwój technik komputerowych pozwolił na zastosowanie algorytmów numerycznych opartych na przekształceniu Fourier'a (dyskretne przekształcenie Fouriera - skrót angielski DFT), obliczających widma bezpośrednio na podstawie definicji. Niestety wraz ze wzrostem liczby punktów wektora czasu znacznie wydłuża się czas obliczeń.





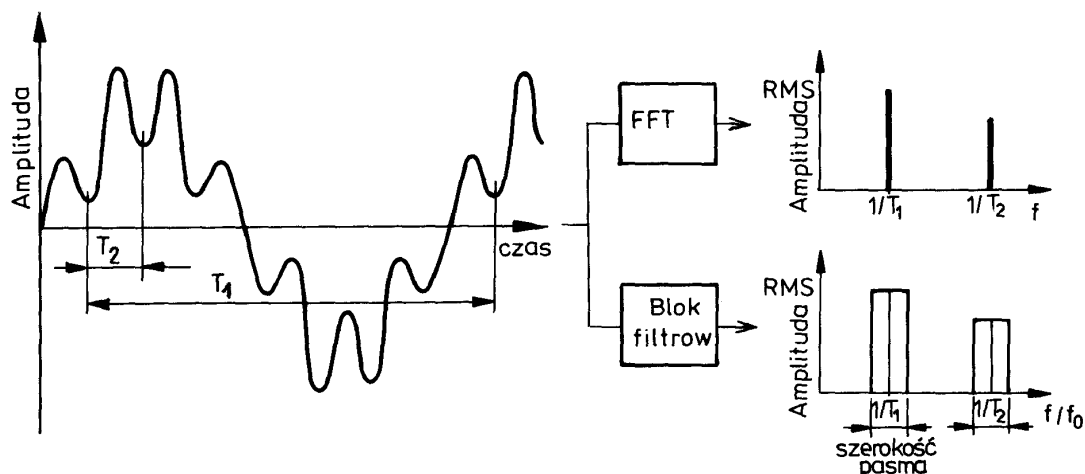
Rys. 8. Charakterystyki tłumienia filtrów: a) idealnego, b) rzeczywistego.

W 1966 roku został opracowany algorytm szybkiego przekształcenia Fourier'a (zwanego w skrócie FFT). Analizatory FFT czasu rzeczywistego (przetwarzające sygnał na bieżąco) rozpowszechniły się od lat osiemdziesiątych XX wieku. Wszelkie późniejsze udoskonalenia zwiększają szybkość przetwarzania i poprawiają czytelność rezultatów, nie ingerując w sam algorytm. W analizatorach tego typu sygnał czasowy jest przetwarzany przetwornikiem analogowo-cyfrowym, amplituda jednocześnie jest próbkowana i kwantowana. Zdyskretyzowany przebieg dzielony jest na bloki o ustalonej liczbie punktów (będącej zwykle wielokrotnością liczby 2) i długości zależnej od zakresu analizy. Każdy blok jest poddawany przekształceniu Fourier'a zgodnie z algorytmem FFT, w efekcie czego powstaje ciągle widmo chwilowe zapisane w postaci skwantowanej. Dla przebiegów okresowych wysokość prążków takiego widma odpowiada amplitudom kolejnych składowych harmonicznym analizowanego sygnału. Przetwarzanie poprzedza zwykle operacja nałożenia tak zwanego okna czasowego (polegająca na przemnożeniu amplitud przez stosowne współczynniki), co służy ograniczeniu błędu nieciągłości kolejnych bloków. Od użytego okna czasowego zależy rozdzielczość i selektywność prążków widmowych, zatem można tutaj doszukiwać się podobieństw do własności filtrów. Uzyskane widma chwilowe są następnie przetwarzane w sposób dogodny do wizualizacji, uśredniane i.t.p.

Przyrządy służące do wykonywania analiz widmowych przebiegów rzeczywistych to analizatory widma. W zależności od przyjętej zasady podziału badanego pasma częstotliwości można je podzielić na analizatory o stałej lub zmiennej szerokości pasma.

Wszystkie analizatory wykonujące szybką transformatę Fouriera obliczają widmo dyskretne, częstotliwości kolejnych prążków zmieniają się ze stałym krokiem. Zaliczamy je zatem do grupy o stałej szerokości pasma. W wyniku przetwarzania według algorytmu FFT widmo odpowiada, z dokładnością co do rozdzielczości, rozwinięciu funkcji w szereg Fouriera.

Analizatory filtrujące sygnał mogą należeć w zależności od budowy filtrów do obu grup: widmo uzyskane przez filtrację określa rozkład energii procesu na poszczególne pasma. Jeśli kilka składowych harmonicznym leży wewnątrz jednego pasma uzyskuje się poziom łączny (najczęściej skuteczną wartość amplitudy złożenia harmonicznego). Różnice między widmami uzyskanymi metodą filtracji i według algorytmu FFT zilustrowano rysunkiem.



Rys. 9. Różnica pomiędzy FFT I filtrowaniem sygnału.

Szczególnym rodzajem analizatorów o zmiennej szerokości pasma są analizatory o stałej względnej szerokości pasma, czyli takie, w których szerokość pasma wzrasta wraz z częstotliwością środkową filtru  $f_0$  tak, że:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \text{const}$$

gdzie pasmo przepustowe  $\Delta f$  jest różnicą górnej  $f_g$  i dolnej  $f_d$  częstotliwości granicznej filtru:

$$\Delta f = f_g - f_d$$

zaś częstość środkową przyjmuje się jako średnią geometryczną górnej i dolnej częstotliwości granicznej:

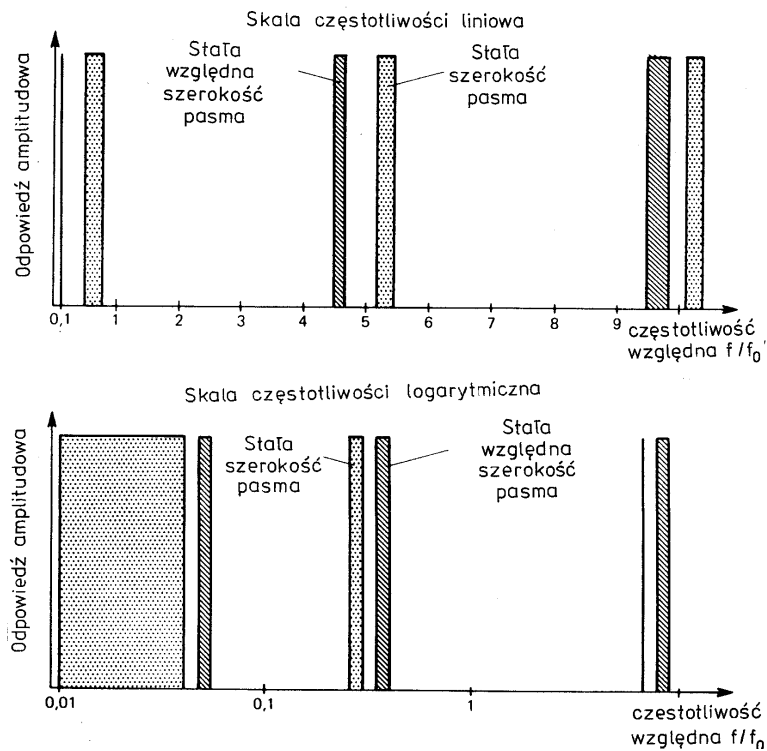
$$f_0 = \sqrt{f_d \cdot f_g}$$

Zrozumienie różnic między analizatorami o stałej i stałej względnej szerokości pasma ułatwia rysunek, na którym graficznie zobrazowano szerokość pasm przepustowych obu typów filtrów w skali częstotliwości liniowej oraz logarytmicznej. Szczególnym przypadkiem analizatorów o stałej względnej szerokości pasma są analizatory oktawowe i tercjowe.

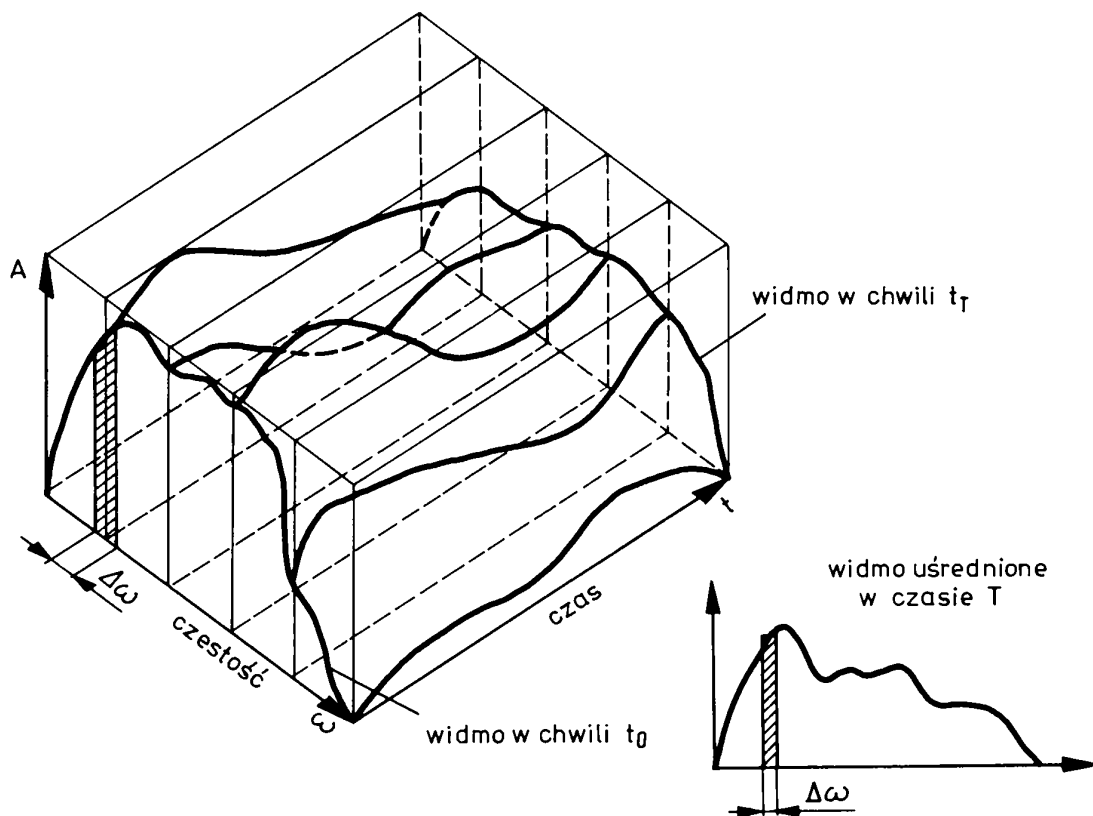
Podział pasma częstotliwości na oktawy lub tercje jest stosowany powszechnie przy ocenie wpływu dźwięku na organizm człowieka. Wynika on z naszego zmysłowego odczucia wysokości tonu i jest podziałem stosowanym w muzyce. Środkowe częstości oktaw i tercji są znormalizowane w skali międzynarodowej.

Przedział, w którym  $f_g = 2f_d$  nazywamy oktawą, natomiast przedział, w którym  $f_g = \sqrt[3]{2} f_d$  - tercją. Łatwo obliczyć, że szerokość pasma oktawy wynosi **70.7%** częstości środkowej; szerokość pasma tercji - **23.1%** częstości środkowej. Stała względna szerokość pasma może być również niekiedy dogodna do oceny drgań mechanicznych.

W wyniku działania analizatorów przeważnie uzyskuje się widmo szeregu realizacji uśrednionych w czasie. Uśrednianie wykonuje się na podstawie wielu widm chwilowych bądź przez określenie czasu uśredniania detektora wartości skutecznej filtrowanego sygnału. Błąd uśredniania  $\epsilon$  maleje ze wzrostem czasu uśredniania i rozszerzaniem pasma przepustowego filtra. Zależność służącą określaniu błędu uśredniania sformułowano w rozdziale o błędach pomiarów. Zagadnienie uzyskiwania widm uśrednionych zilustrowano na rysunku 11.



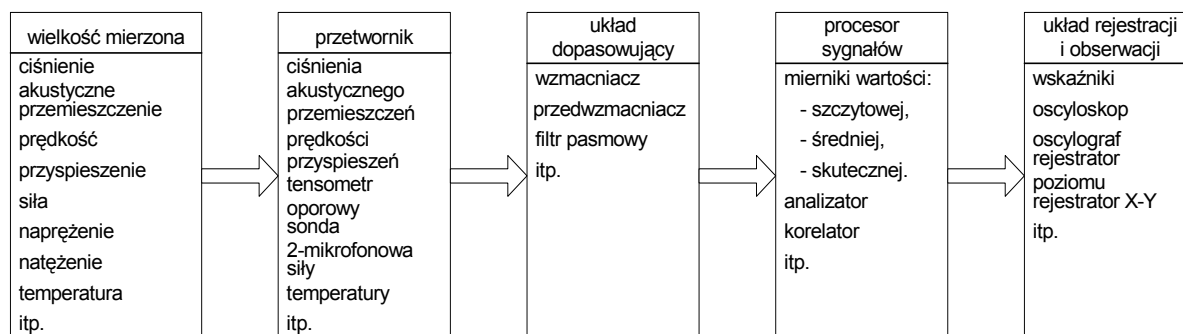
Rys. 10. Różnice między analizatorami o stałej i stałej względnej szerokości pasma.



Rys. 11. Ilustracja sposobu otrzymywania widm uśrednionych w czasie.

## 6. Aparatura do pomiarów wielkości dynamicznych

Wielkości mechaniczne zmienne w czasie mierzy się podobnie. Wielkość mechaniczna zamieniana jest na elektryczną (napięcie, ładunek, i.t.p.), przetwarzany jest sygnał elektryczny (ewentualnie po przetworzeniu do postaci cyfrowej), a wyniki pomiarów są obrazowane w sposób charakterystyczny dla konkretnego typu miernika (urządzenia pomiarowego). Zestaw pomiarowy (miernik) musi zatem zawierać elementy przedstawione na schemacie blokowym (rysunek 12). Układy pomiarowe różnią się między sobą przetwornikami pomiarowymi stosowanymi dla mierzonej wielkości.



**Rys. 12.** Schemat blokowy układu do przetwarzania i pomiaru wielkości dynamicznych.

Jednym z ważniejszych pojęć w przetwarzaniu sygnałów mechanicznych na elektryczne jest **charakterystyka częstotliwościowa** lub **przenoszenia**. Przedstawia ona przebieg określonego parametru (amplitudy, fazy) na wyjściu układu w zależności od częstotliwości sygnału wejściowego.

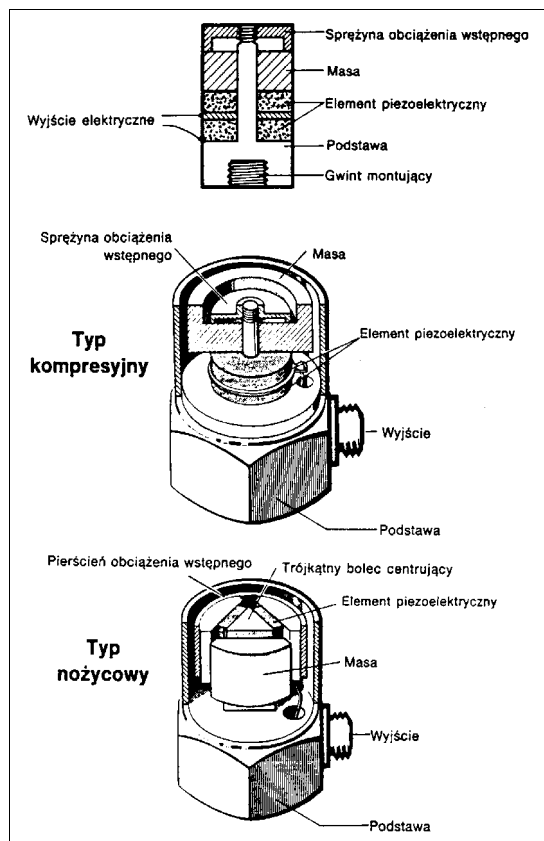
Przetwarzanie sygnału mechanicznego na sygnał elektryczny ma podstawowe znaczenie dla dokładności pomiaru, dlatego powinno spełnić określone wymagania:

- Przetwarzanie musi być wierne, to znaczy że wszystkie parametry opisujące sygnał mechaniczny muszą mieć proporcjonalne wartości w sygnale elektrycznym.
- Muszą istnieć niezawodne metody wyznaczania współczynników proporcjonalności przetwarzania.
- Współczynniki proporcjonalności przetwarzania powinny być stałe i stabilne, to znaczy niezależne od parametrów otoczenia.

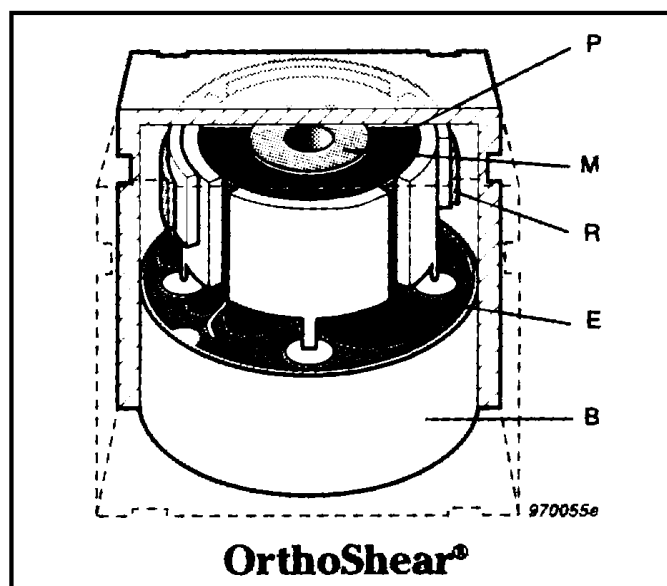
Jako przetworniki do pomiarów wibracji najczęściej stosowane są akcelerometry piezoelektryczne. Zasadę działania i budowę takiego przetwornika ilustruje rysunek 14. Zgodnie z drugim prawem Newtona na element piezoelektryczny działa siła proporcjonalna do bezwładności drgającej masy. Ładunek elektryczny na okładkach odkształcanego elementu piezoelektrycznego jest proporcjonalny do przyspieszenia drgań przetwornika. Na rysunku przedstawiono dwa podstawowe rozwiązania konstrukcyjne akcelerometrów piezoelektrycznych:

- typ kompresyjny, w którym element piezoelektryczny obciążony jest siłą nacisku;
- typ nożycowy, w którym na element piezoelektryczny działa siła tnąca.

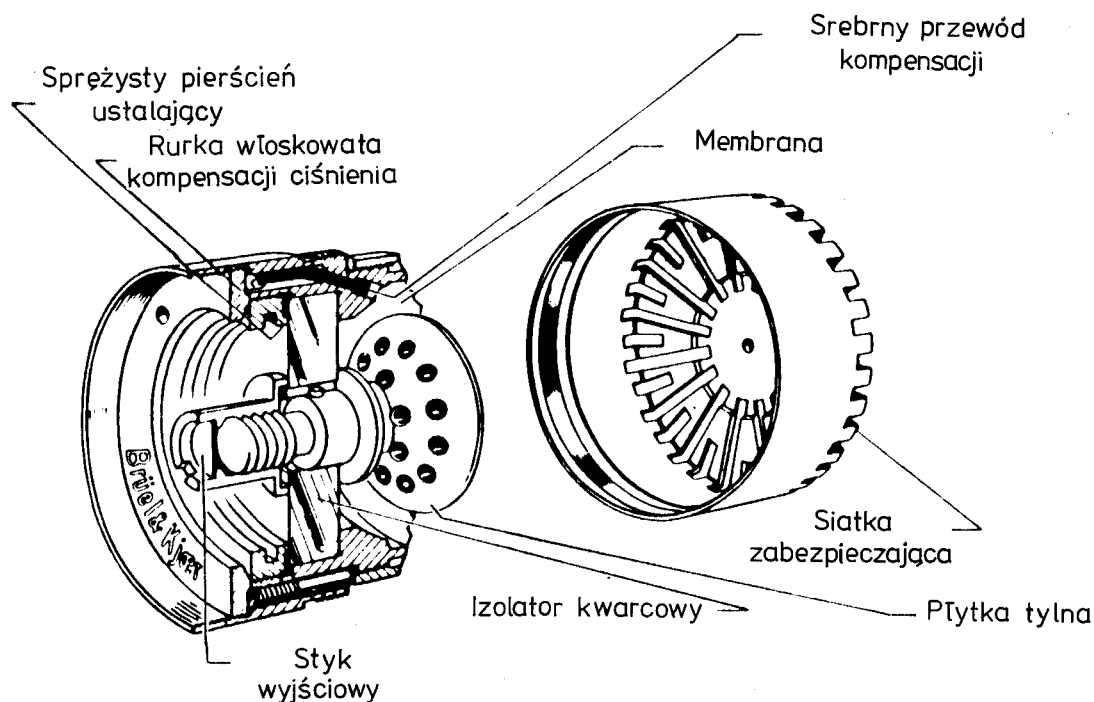
Wachlarz szczegółowych rozwiązań konstrukcyjnych akcelerometrów piezoelektrycznych jest bardzo szeroki. Dominującą pozycję zdobyły obecnie rozmaite modyfikacje przetworników typu nożycowego, które pozwalają minimalizować procesy pasożytnicze, a przede wszystkim wpływ drgań poprzecznych na błąd przetwarzania. Ostatnio opracowano również konstrukcję akcelerometrów piezoelektrycznych z integralnym miniaturowym przedwzmacniaczem zasilanym przewodem sygnałowym („ICP”, „delta-tron”). Tego typu rozwiązanie z centralnie rozmieszczonymi elementami piezoelektrycznymi poddawanyymi sile tnącej („orto-shear”) przedstawiono na kolejnym rysunku.



Rys. 13. Budowa akcelerometrów piezoelektrycznych.



Rys. 14. Akcelerometr piezoelektryczny z integralnym przedwzmacniaczem:  
 P - elementy piezoelektryczne, M - masa sejsmiczna, R - pierścień sprężysty, E - elektronika, B - podstawa.



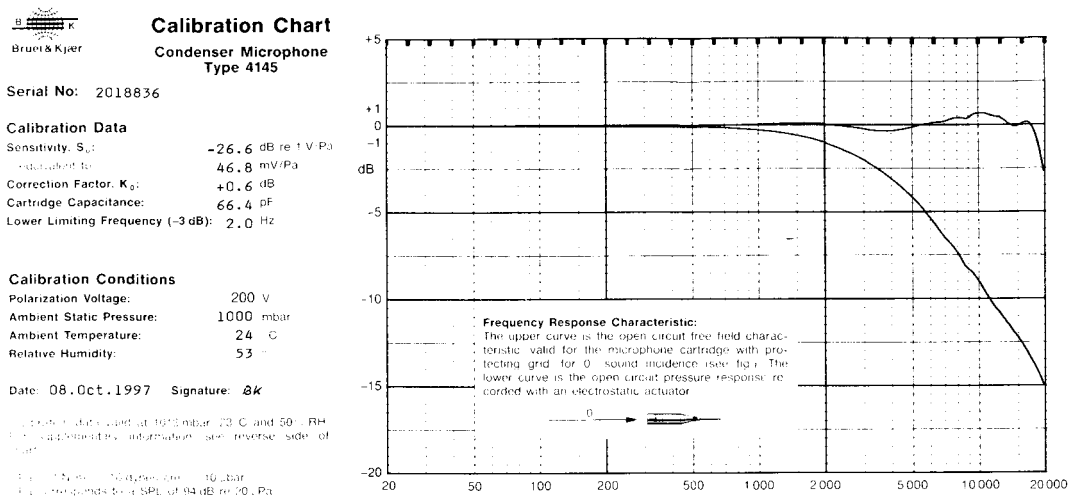
**Rys. 15.** Budowa mikrofonu pojemnościowego.

Do pomiarów dźwięków jako przetwornik sygnału akustycznego stosowany jest najczęściej mikrofon pojemnościowy. Wykorzystuje on wahania pojemności kondensatora płytkowego wskutek zmian oddalenia okładek. W mikrofonie membrana (ruchoma okładka kondensatora) oscyluje względem płyty tylnej (drugiej okładki) pod wpływem wahań ciśnienia akustycznego. Wyrównanie ciśnienia atmosferycznego (wolnozmiennego) po obu stronach membrany zapewnia rurka włoskowata o niewielkiej średnicy. Konstrukcję mikrofonu pojemnościowego przedstawiono na rysunku 15.

Mikrofon może być stosowany do pomiarów tylko w tym zakresie częstotliwości, gdzie istnieje liniowa zależność między zmianami poziomu ciśnienia a zmianami pojemności elektrycznej.

Istnieje szereg innych przetworników do pomiarów rozmaitych wielkości mechanicznych. Przykładowo, do pomiarów natężenia dźwięku posłuży sonda dwumikrofonowa, odkształcenia będą przetwarzane tensometrami oporowymi, zaś pomiary drgań skrętnych wału można wykonywać przy wykorzystaniu przetworników laserowych należących do szerszej grupy przetworników optycznych. Istnieją rozwiązania wykorzystujące do pomiarów dynamicznych prądy wirowe i zjawiska elektromagnetyczne. Szczegółowe informacje o parametrach i zastosowaniach konkretnych typów uzyskuje się od producentów aparatury pomiarowej; podręczniki podają zwykle krótką charakterystykę i ewentualnie przykłady zastosowań.

Każdy przetwornik pomiarowy powinien mieć metrykę (tak zwaną kartę kalibracyjną), gdzie znaleźć się winna między innymi charakterystyka częstotliwościowa, pozwalająca określić użyteczny zakres stosowania. Współcześnie producenci sprzętu pomiarowego oprócz metryki (przykładowa metryka mikrofonu pomiarowego na rysunku) dostarczają często komplet informacji o przetworniku w postaci zbiorów dyskowych czytelny dla systemów obsługujących bazy danych aparatury pomiarowej.



**Rys. 16.** Metryka mikrofonu pomiarowego typu B&K 4145.

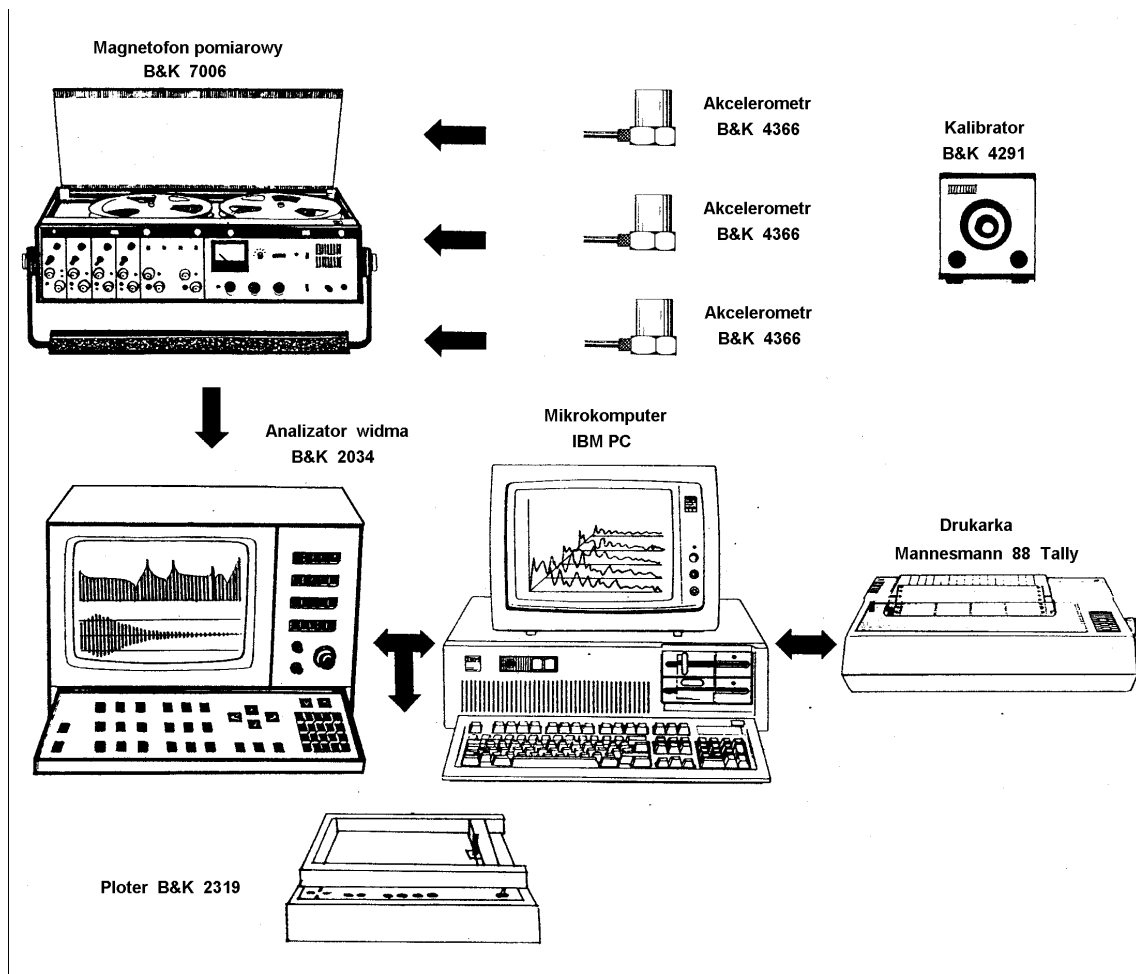
Sygnal mechaniczny zamieniony przez przetwornik na proporcjonalny do niego sygnal elektryczny jest przetwarzany wstepnie dalej operacjami, omowionymi skrotowo ponizej:

- **Wzmocnienie** polega na zwiakszeniu wartosci określonego parametru sygnalu o ustaloną wartosc po przejsci u przez uk lad elektryczny wzmacniacza. Szczególnym przykladem wzmacniacza jest uk lad, którego wzmacnienie równe jest jedności, tak zwany przedwzmacniacz. Zadaniem tego uk ladu jest dopasowanie parametrów wyjsciowych przetwornika do parametrów wejsciowych wzmacniacza;
- **Tlumienie** polega na zmniejszeniu wartosci określonego parametru sygnalu o ustaloną wartosc po przejsci u przez uk lad elektryczny tlumika;
- **Filtracja** czyli ograniczenie pasma czestotliwosci (widma) do zakresu określonego przez parametry charakterystyczne filtru, przez który przechodzi sygnal.

Element nazwany umownie procesorem sygnalów moze byc urzadzeniem analogowym, cyfrowym bąd z zestawem róznych urzadzeń. Jego zadaniem jest wyodrębnienie z sygnalu informacji uzytecznych do wnioskowania. Najprostszym procesorem moze byc detektor wartosci szczytowej, sredniej lub skutecznej; bardziej skomplikowane procesory to analizatory widma czy tez analizatory rozkladu prawdopodobienstwa.

Wyniki pracy procesora moga byc liczbami lub miec postac funkcji. Do ich zobrazowania sluzą róznych rodzaju urzadzenia obserwacyjno-rejestracyjne. Na obecnym etapie rozwoju technik przetwarzania numerycznego do grupy tej moga byc zaliczone równiez urzadzenia do ciągłego nadzoru nad przebiegiem badanych procesów, na przyklad produkcyjnych lub technologicznych.

Przyklad konkretnego zlozonego uk ladu do pomiarów drgań i hałasu przedstawiono na rysunku 17. Zestaw taki zawiera wszystkie elementy wymienione na schemacie (rysunek 12), a dodatkowo ma możliwość magazynowania informacji w postaci zapisu magnetycznego przebiegów analogowych oraz zapisu cyfrowego. W nowoczesnych rozwiązaniach rolę rejestratora i analizatora moze pełnić specjalistyczny komputer wyposażony w przetworniki analogowo-cyfrowy, procesory sygnalowe i stosownie oprogramowany. Uzycie róznych przetworników umożliwia rozwiązywanie najbardziej zlozonych zadań pomiarowych, a wsparcie technikami numerycznymi tworzy zeń system sluzący skomplikowanym zagadnieniom badawczym. Tego typu systemy znajdują zastosowanie w większości prac prowadzonych w Pracowni Wibroakustyki IPBM PW.



Rys. 17. Przykładowy zestaw aparatury pomiarowej.

## 7. Podstawy oceny błędów pomiarów

Otrzymana w wyniku pomiaru miara wielkości fizycznej  $x$  różni się od prawdziwej miary  $x_0$ . Różnicę  $x - x_0 = \delta$  nazywamy **rzeczywistym błędem bezwzględnym** wielkości mierzonej. Ze względu na źródła, błędy podzielić możemy na błędy przyrządu pomiarowego, błędy metody pomiarowej (wynikające na przykład z przybliżonego charakteru wzoru), błędy powodowane niedokładnością zmysłów lub wreszcie statystycznym charakterem zjawiska. Typowym przykładem błędu metody jest tak zwany błąd uśredniania  $\epsilon$  podczas filtrowania sygnałów, który maleje ze wzrostem czasu uśredniania i rozszerzaniem pasma filtracji według zależności:

$$\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{\Delta\omega \cdot T}}$$

gdzie:  $T$  - czas uśredniania,

$\Delta\omega = 2\pi\Delta f$  - pasmo przepustowe filtru.

Ze względu na sposób w jaki błędy wpływają na wynik pomiaru dzielimy je na trzy następujące grupy: systematyczne, przypadkowe i grube.

**Błędy systematyczne** zawsze w ten sam sposób wpływają na wyniki pomiarów wykonanych za pomocą tej samej metody i aparatury pomiarowej. Przy zmianie warunków pomiaru według określonej prawidłowości, błąd systematyczny zachowuje stałą wartość lub zmienia się w sposób



ściśle określony. Wiele różnorodnych przyczyn może spowodować powstanie błędu systematycznego.

Minimalna wartość błędu systematycznego zależy od **dokładności** stosowanego przyrządu (wynikającej z jego klasy). Przyrządy skonstruowane są w ten sposób, by wyniki prawidłowo wykonanych pomiarów różniły się od wartości prawdziwej  $x_0$  nie więcej niż o wartość najmniejszej działki skali lub ułamek tej działki określony klasą przyrządu. Wartość najmniejszej działki, czyli na przykład odległość między sąsiednimi kreskami na skali przyrządu (lub ułamek tej odległości określony klasą przyrządu) nazywa się **dokładnością odczytu** i oznaczona jest symbolem  $\Delta x$ . Wartość prawdziwa  $x_0$  może być większa albo mniejsza od wartości odczytanej  $x$ , stąd dokładność odczytu może być dodatnia lub ujemna ( $\pm \Delta x$ ).

Przykładowe maksymalne dopuszczalne błędy podstawowe pomiaru dla mierników poziomu dźwięku w zależności od klasy przyrządu według PN-79/T-06460 przedstawiono w poniższej tabeli:

Klasa dokładności	0	1	2	3
Błąd podstawowy pomiaru, dB	$\pm 0,4$	$\pm 0,7$	$\pm 1,0$	$\pm 1,5$

Innym źródłem błędu systematycznego jest błąd skali przyrządu, spowodowany trwałym jego uszkodzeniem lub wadliwym wykonaniem. Do tej grupy zaliczymy również błędy wynikające z niewłaściwego sposobu wykorzystania przyrządów, np. złego ustawienia, niewłaściwej temperatury otoczenia, wilgotności itp. Celem wyeliminowania błędów tego typu należy przyrządy wykorzystywać w sposób zgodny z instrukcją i co pewien czas je kontrolować (czyli porównywać ich wskazania ze wzorcami). Generalnie do dobrej praktyki laboratoryjnej należy możliwie najczęstsze wzorcowanie przyrządów pomiarowych.

Przyczyną błędu systematycznego może być też zła metoda pomiaru. Jeżeli na przykład moc akustyczną źródła spróbujemy określić mierząc natężenie dźwięku w komorze pogłosowej to wynik pomiaru będzie nieprawdziwy. Błąd taki można wyeliminować przez ulepszenie sposobu pomiaru, czyli w tym przypadku na przykład wykonać pomiary w komorze bezechowej. Błąd systematyczny może być wprowadzony przez samego eksperymentatora (na przykład błędnym wzorcowaniem toru pomiarowego). Błędy systematyczne można zmniejszać nieograniczenie udoskonalając metodę pomiaru lub przyrządy, przez stosowanie dokładniejszych wzorców, oraz przez wyeliminowanie błędów popełnianych przez eksperymentatora.

Kolejną grupę stanowią **błędy przypadkowe**. Są to błędy, których wartość bezwzględna i znak zmieniają się wielokrotnie przy pomiarach tej samej wielkości fizycznej.

Założmy, że pomiar wykonujemy wielokrotnie, za pomocą przyrządu, którego dokładność jest bardzo duża, a więc błąd systematyczny mały. W takim przypadku może się zdarzyć, że różnice między wynikami kolejnych pomiarów będą znacznie przewyższać błąd systematyczny. Błąd, którym obarczony jest każdy z pomiarów, nazywamy błędem przypadkowym. Wiele różnorodnych przyczyn może spowodować powstanie błędu przypadkowego. Może on wynikać z własności obiektu badanego, na przykład wzrostu amplitudy drgań w obszarach rezonansowych. Innym jego źródłem są własności przyrządu pomiarowego, którego wskazania zależą od przypadkowych drgań budynku, ruchów powietrza, tarcia w łożyskach, docisku (na przykład przy użyciu sondy ręcznej) itp. Błędy przypadkowe mogą mieć za przyczynę również podłoże fizjologiczne. Przykładem może być spóźniony odczyt wartości maksymalnej poziomu ciśnienia akustycznego podczas pomiaru hałasu powodowanego przez przejeżdżający pojazd. Błędów przypadkowych nie daje się wyeliminować całkowicie, lecz ich wpływ na wynik ostateczny można oszacować. Sposób szacowania przedstawiono dalej.

**Błędy grube** lub **pomyłki** wynikają z niestaranności eksperymentatora. Dla ich eliminacji trzeba powtórzyć pomiary. Błędy grube są w zasadzie do uniknięcia, ewentualnie stosunkowo łatwo je zidentyfikować i wyeliminować.

Bez względu na przyczynę błędy możemy zapisać jako błędy **bezwzględne**, **względne** i **procentowe**.

**Błąd bezwzględny** to odchylenie wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej wyrażonej w takich jednostkach jak wielkość mierzona. Błąd bezwzględny nie oddaje sam w pełni wartości wykonanego pomiaru. Jeżeli na przykład wiemy, że wynosił on  $\Delta a = \pm 5 \text{ mm/s}^2$  to wartość wykonanego pomiaru ocenić możemy tylko wtedy, gdy znamy bezpośredni odczyt  $a$ . Błąd  $\Delta a = \pm 5 \text{ mm/s}^2$  jest bardzo duży wtedy, gdy  $a = 1 \text{ cm/s}^2$  a mały, gdy  $a = 150 \text{ m/s}^2$ . Stąd też obok wartości otrzymanej z pomiaru należy zawsze podać błąd, na przykład:

$$a \pm \Delta a = (102 \pm 0,1) \text{ m/s}^2.$$

Tak zapisany rezultat nazywany jest **wynikiem pomiaru**. Często rezultat pomiaru bez oceny dokładności jest bezwartościowy.

**Błędem względnym** nazywamy stosunek błędu bezwzględnego do wartości mierzonej  $\left| \frac{\Delta a}{a} \right|$ . Jest on wielkością niemianowaną.

Błąd względny wyrażony w procentach to **błąd procentowy**:

$$B_p = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| 100\%.$$

Tak zdefiniowany błąd procentowy nie zawiera bezpośrednich informacji o wyniku lub błędzie bezwzględnym. Pełną informację o wartości wykonanego pomiaru dają łącznie: wynik pomiaru i błąd bezwzględny lub procentowy. Można zatem rezultat pomiaru podać jako wynik pomiaru i błąd procentowy.

Zauważmy, że dla wyniku podanego w decybelach, błąd pomiaru też jest błędem względnym. Przykładowo poziom ciśnienia akustycznego  $L=80 \text{ dB} \pm 1 \text{ dB}$  oznacza zakres  $L=79 \div 81 \text{ dB}$ , czyli ciśnienie  $p.=0,178 \div 0,224 \text{ [Pa]}$ . Błąd  $\pm 1 \text{ dB}$  to średnio  $\pm 11,5 \%$  wartości zmierzonej (a ściślej zakres od  $0,2 \text{ Pa} -11 \%$  do  $0,2+12 \%$ ).

Z punktu widzenia przydatności wyników istotne jest oszacowanie maksymalnej wartości błędów pomiarów. Przy założeniu, że w sposób powtarzalny wykonano szereg pomiarów z identyczną dokładnością warto również oszacować wpływ błędu przypadkowego. W praktyce pomiarowej oblicza się odchylenie standardowe serii pomiarów i określa tak zwany poziom ufności.

Odchylenie od średniej arytmetycznej dane jest wzorem:

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}$$

gdzie:  $x_i$  - wartość z  $i$ -tego pomiaru,  
 $\bar{x}$  - wartość średnia określona wzorem:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

gdzie:  $n$  - ilość pomiarów.

Odchylenie standardowe serii pomiarów określimy z zależności:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

Dla założonego poziomu ufności  $\alpha$  wyników  $n$  pomiarów błąd przypadkowy zostanie określony jako iloczyn odchylenia standardowego i odczytanego z tabeli współczynnika Studenta.

**Współczynniki Studenta dla różnych poziomów ufności  $\alpha$  i liczby wykonywanych pomiarów  $n$ :**

<b>n</b>	<b>\</b>	<b><math>\alpha</math></b>	<b>0,5</b>	<b>0,7</b>	<b>0,95</b>	<b>0,999</b>
2			1,00	2,0	12,7	636,6
3			0,82	1,3	4,3	31,6
4			0,77	1,3	3,2	12,9
5			0,74	1,2	2,8	8,6
6			0,73	1,2	2,6	6,9
7			0,72	1,1	2,4	6,0
8			0,71	1,1	2,4	5,4
9			0,71	1,1	2,3	5,0
10			0,70	1,1	2,3	4,8
12			0,70	1,1	2,2	4,6
14			0,69	1,1	2,2	4,1
16			0,69	1,1	2,1	4,0
18			0,69	1,1	2,1	4,0
20			0,69	1,1	2,1	3,9
22			0,69	1,1	2,1	3,8
24			0,68	1,1	2,1	3,8
26			0,68	1,1	2,1	3,7
28			0,68	1,1	2,0	3,7
30			0,68	1,1	2,0	3,6
40			0,68	1,1	2,0	3,6
60			0,68	1,0	2,0	3,5
120			0,68	1,0	2,0	3,4
$\infty$			0,67	1,0	2,0	3,3
$\infty$			0,674	1,036	1,960	3,291

Przykładowo, dla 4 pomiarów amplitudy przemieszczeń drgań wynoszących: 0,95 [mm], 1,05 [mm], 0,9 [mm] i 1,1 [mm], wartość średnia to 1 [mm], zaś odchylenie standardowe: 0,0456 [mm]. Wynik tego pomiaru dla poziomu ufności 0,95 wyniesie  $1 \pm (0,0456 \cdot 3,2)$  [mm], czyli  $1 \pm 0,146$  [mm].

## 8. Uwagi praktyczne o wykonywaniu pomiarów

Poprawność i powtarzalność wyników zależy w dużej mierze od właściwego postępowania podczas pomiarów. Podajemy kilka oczywistych zasad, których przestrzeganie jest konieczne dla uzyskania wiarygodnych rezultatów. Rzeczy te są czytelnikom doskonale znane z wcześniejszych etapów edukacji (szkoła średnia, laboratorium fizyki, laboratorium elektrotechniki itp.), niemniej nagminnym jest zapominanie o nich i niestosowanie w praktyce.

Przed rozpoczęciem badań należy krytycznie przeanalizować rodzaj i charakter zjawisk oraz wymagany zakres pomiarowy (w tym pasmo przenoszenia) aparatury. Po zdefiniowaniu zadania kompletujemy elementy układu pomiarowego, szczególnie starannie dobierając przetworniki pomiarowe.

Starajmy się możliwie często sprawdzać i wzorcować aparaturę pomiarową. Najkorzystniej wykonywać wzorcowanie kompletnych torów pomiarowych - unika się w ten sposób potencjalnych pomyłek związanych z przeliczaniem wielkości mechanicznych na elektryczne i odwrotnie. Jeśli zatem dysponujemy wzorcem odniesienia wielkości mechanicznych (źródłem sygnału wzorcowego) - wykorzystujemy to w praktyce pomiarowej.

Niezmiernie istotnym jest stosowanie właściwego zakresu pomiarowego, prowadzące do wykorzystania pełnej dynamiki miernika. Wiąże się to z wyborem odpowiednich współczynników wzmocnienia sygnału. Przy przetwarzaniu cyfrowym dzięki dopasowaniu sygnału do karty przetwornika minimalizujemy błąd kwantyzacji. We wszystkich miernikach odczyt wartości nieco poniżej górnego limitu na danym zakresie jest zawsze dokładniejszy niż odczyt w pobliżu zera skali (ogranicza błąd odczytu). Dla mierników wyposażonych w skokową regulację wzmocnienia co 10 dB oznacza to, że wynik odczytywać powinniśmy powyżej  $\frac{1}{3}$  skali przyrządu.

Pamiętajmy wreszcie o ocenie (oszacowaniu) błędu pomiaru. Wyniki bez informacji o błędach są bowiem bezwartościowe. Często podanie jedynie wartości liczbowej błędu bez opisu sposobu oszacowania może podważać zaufanie do wyników (dotyczy to zwłaszcza bardzo małych błędów, na przykład 0.05%). Jednocześnie bezcelowym jest podawanie wielu liczb znaczących po kropce dziesiątej jeśli wiadomo, że rezultat pomiarów jest obarczony wielokrotnie większym błędem. Przykładowo, wynik pomiaru przyspieszenia podany w formie  $a = 150.001 \pm 1 \text{ m/s}^2$  świadczy o braku kompetencji (sensowne jest natomiast  $a = 150.5 \pm 1 \text{ m/s}^2$ ).

Przestrzeganie przedstawionych zasad nie gwarantuje jeszcze rzetelności rezultatów, jest jednakże niezbędne dla uzyskania dobrych wyników. Wszystkie pomiary mają bowiem swoją specyfikę, którą poznaje się zdobywając doświadczenie. Praktyczne stosowanie zaprezentowanych uwag powinno ułatwić wykształcenie właściwych nawyków, a w konsekwencji umożliwić po dodatkowym przygotowaniu samodzielne rozwiązywanie zagadnień pomiarowych.

### Literatura

1. Międzynarodowy słownik terminów metrologicznych.
2. Bendat J, Piersol A., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych, PWN, Warszawa 1979.
3. Cempel C., Diagnostyka wibroakustyczna maszyn, PWN, Warszawa 1989.
4. Dziama A., Michniewicz M., Niedźwiedzki A., Przekładnie zębate. PWN, Warszawa 1989.
5. Engel Z., Ochrona środowiska przed drganiami i hałasem, PWN, Warszawa 1993.
6. Lipowczan A., Podstawy pomiarów hałasu, GIG-LWzH, Warszawa-Katowice 1987.
7. Morel J., Drgania maszyn i diagnostyka ich stanu technicznego, PTDT, Warszawa 1994.
8. Pawłowski B. W. Badania diagnostyczne w technice. WNT, Warszawa 1976.
9. Randall R.B. Frequency analysis, Brüel&Kjær, Nærum 1987.
10. Monitorowanie stanu maszyn, Brüel&Kjær, Nærum.
11. Pomiary dźwięków, Brüel&Kjær, Nærum.
12. Wibracje i wstrząsy, Brüel&Kjær, Nærum.